Analyse fonctionnelle

Max Fathi[1]

April 1, 2024

[1]LJLL & LPSM, Université Paris Cité, France
Je remercie Mathis Lefebvre pour avoir signalé une erreur dans une version précédente de ce poly

Contents

Chapter 1

Introduction

Ces notes de cours sont largement inspirées de celles de G. Carlier et de I. Gallagher, ainsi que des ouvrages [1, 6].

1.1 Espaces vecoriels topologiques

Les espaces de fonctions sont souvent des (parties convexes d') espaces vectoriels topologiques. On peut penser à l'ensemble de toutes les fonctions entre deux espaces vectoriels donnés, mais aussi

- Les espaces de fonctions régulières (continues, C^k, C^∞...)
- Les espaces de fonctions vérifiant des conditions d'intégrabilité L^p.
- Les espaces de fonctions ayant un comportement donné sur le bord du domaine (nulles, convergeant vers 0...)

Ces espaces peuvent être munis de différentes topologies (convergence simple, convergence uniforme, convergence L^p...). Dans certains cas, ces topologies sont définies par des normes. Mais comme ces espaces sont de dimension infini, les différentes normes ne sont pas équivalentes.

Les buts de ce cours sont

- D'étudier la topologie de certains espaces vectoriels topologiques, dans une généralité suffisante pour englober de nombreux espaces de fonctions, et de voir de nouveaux outils dans des contextes connus (espaces de Banach, espaces de Hilbert...).
- De comprendre la dualité sur ces espaces, et ses conséquences et applications.
- De présenter certains nouveaux espaces de fonctions, utiles dans différentes branches des mathématiques (EDP notamment).
- D'étendre certaines théorie connues (transformée de Fourier, opérateurs linéaires symétriques) à de nouveaux espaces de fonctions.

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel topologique)**.** *Un espace vectoriel topologique (sur $\mathbb{R}$) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une topologie pour laquelle les applications*

$$(x, y) \in E \times E \longrightarrow x + y; \qquad (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \longrightarrow \lambda x$$

sont continues.

Remarque 1.1.1. *Dans un EVT, comme les translations sont des homeomorphismes, si $\mathcal{V}$ est un système fondamental de voisinages de 0, alors $\{x+V, V \in \mathcal{V}\}$ est un système fondamental de voisinages de x.*

Définition 1.1.2. *Un sous-ensemble C d'un espace vectoriel topologique est dit convexe si $\forall x, y \in C$ et $t \in [0,1]$ on a $tx+(1-t)y \in C$.*

Remarque 1.1.2. *Si C est fermé, il suffit de vérifer cette propriété pour $t = 1/2$.*

Définition 1.1.3. *Un espace vectoriel topologique localement convexe est un EVT dont chaque point possède une base de voisinages convexes.*

Un espace vectoriel topologique localement convexe séparé est un EVTLC dont la topologie est séparée.

Remarque 1.1.3. *Comme conséquence de la remarque 1.1.1, on peut remplacer "'chaque point"' par "'un point"' dans cette définition.*

On peut supposer sans perdre de généralité que $\{0\}$ possède un système fondamental de voisinages convexes et symétriques (i.e. tels que $-C = C$). Comme l'intérieur d'un convexe est un convexe, on peut aussi sans perdre de généralité supposer les voisinages ouverts dans cette définition.

Remarque 1.1.4. *Un espace vectoriel topologique peut ne pas être localement convexe. Il sera vu en TD que si $0 < p < 1$, l'espace $L^p([0,1], \mathbb{R})$ des foncitons telles que $|f|^p$ soit intégrables, muni de la distance $d(f,g) = \int |f-g|^p dt$, est un espace vectoriel topologique qui n'est pas localement convexe.*

Définition 1.1.4. *Une partie A d'un EVTLC est dite bornée si pour tout voisinage ouvert V de l'origine, il existe $C > 0$ tel que $A \subset C \cdot V$.*

Si l'espace vectoriel est normé, en prenant $B(0,1)$ comme voisinage, si A est borné alors $A \subset B(0,C)$ pour un $C > 0$, ce qui coincide avec la définition usuelle.

Exemple 1.1.1.

- *La boule unité de $\mathbb{R}^n$ est un convexe (quelque soit la norme).*
- *L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ prenant la valeur nulle en zéro est convexe.*
- *$\{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \limsup_{\pm\infty} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| = 0 \ \forall k, \ell \in \mathbb{N}\}$ est un convexe (qui jouera un rôle important lorsqu'on verra les distributions).*

La topologie induite par une norme sur un EVT donne automatiquement un EVTLCS. En dimension infinie, il est souvent utile de considérer des topologies qui ne sont pas induites par une norme. Mais les espaces considérés par les analystes ont souvent plus de structure qu'un EVTLCS général.

Définition 1.1.5 (Jauge d'un convexe)**.** *Soit C un convexe de $\mathbb{R}^d$, tel que $0 \in \mathrm{Int}(C)$. Sa jauge est définie par*

$$||x||_C := \inf\{t > 0; x \in tC\}.$$

Proposition 1.1.6. *La jauge de C vérifie*

1. *$\forall \lambda > 0, x, y \in \mathbb{R}^d$, $||\lambda x||_C = \lambda ||x||_C$ et $||x+y||_C \leqslant ||x||_C + ||y||_C$;*
2. *Si C est ouvert, alors $C = \{x \in E; ||x||_C < 1\}$;*

3. La jauge est une application continue.

4. Si C est un ouvert symétrique borné, la jauge définit une norme.

Les trois premières parties sont encore vraies sur un espace vectoriel topologique (les preuves ci-dessous le montreront). La quatrième pose problème (il faut déjà connaitre la topologie pour définir les ouverts bornés), mais on verra plus tard son analogue.

Proof. 1. L'homogénéité positive est vraie par définition. Pour l'inégalité triangulaire, soit s, t tels que $s^{-1}x$ et $t^{-1}y$ appartiennent à C. Alors par convexité

$$\frac{s}{s+t}s^{-1}x + \frac{t}{s+t}t^{-1}y \in C$$

et donc $(s+t)^{-1}(x+y) \in C$. On en déduit que $||x+y||_C \leqslant s+t$, et on conclut en prenant l'infimum sur s et t.

2. Si $x \in C$, comme C est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in C$, et donc $||x||_C \leqslant (1+\varepsilon)^{-1} < 1$.

   Réciproquement, si $||x||_C < 1$, il existe $t > 1$ tel que $tx \in C$. Comme $0 \in C$, on peut écrire x comme une combinaison convexe de deux éléments de C, et donc $x \in C$ par convexité.

3. Comme on a déjà l'inégalité triangulaire, $|||x||_C - ||y||_C| \leqslant ||x-y||_C$, donc il suffit de montrer la continuité en 0. Soit $\varepsilon > 0$, et V un voisinage de 0 inclus dans C. Alors εC est encore un voisinage de 0 inclus dans C, et pour tout $y \in \varepsilon V$, on a $\varepsilon^{-1}y \in V \subset C$, donc $||y||_C \leqslant \varepsilon$. Donc la jauge est bien continue en 0.

4. On a déjà l'inégalité triangulaire, et l'homogénéité est une conséquence directe de (i) et de la symétrie. Il nous reste à montrer la séparation. Comme C est borné, pour tout $x \neq 0$, il existe $M > 0$ tel que $\lambda x \notin C \ \forall \lambda \geqslant M$, et donc $||x||_C \geqslant M^{-1}$.

□

Définition 1.1.7 (Convexe dual)**.** *Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^d$ dont l'intérieur contient l'origine. Son dual est défini par*

$$C^\circ := \{y \in \mathbb{R}^d; \langle x, y\rangle \leqslant 1 \forall x \in C\}.$$

Etant donné une norme $||\cdot||$, sa norme duale $||\cdot||_*$ est la norme associé au dual de la boule unité pour $||\cdot||$.

Si à un vecteur x on associe la forme linéaire $f_x : y \longrightarrow \langle x, y\rangle$, la norme duale $||x||_*$ est la norme de la forme linéaire par rapport à $||\cdot||$, c'est à dire

$$||x||_* = \sup_y \frac{f_x(y)}{||y||}.$$

Exercice 1.1.1. *Soit $p \geqslant 1$. Quelle est la norme duale de $||x||_p := (\sum |x_i|^p)^{1/p}$? Indication : penser à l'inégalité de Hölder.*

Comme on a équivalence des normes, en dimension finie le dual d'un espace vectoriel a la même topologie que l'espace lui même, et donc il n'y a pas grand chose a dire du point de vue qualitatif[1]. On verra que par contre, sur un espace vectoriel normé en dimension infinie, il existe plusieurs topologies naturelles sur le dual, et qu'elles ne coincident pas en général.

1.2 Rappels de topologie

1.2.1 Rappels généraux

Définition 1.2.1. *Une topologie est séparée si pour toute paire de points distincts on peu trouver deux voisinages disjoints qui chacun contiennent un des deux points.*

1.2.2 Théorème de Baire pour les espaces complets

Théorème 1.2.2. *Soit E un espace métrique complet. Alors il est de Baire : tout intersection dénombrable d'ouverts denses est aussi dense.*

De manière équivalente, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est elle-même d'intérieur vide.

[1] En revanche, l'étude quantitative des liens entre un espace de dimension grande mais finie et son dual est un domaine d'étude actif à ce jour.

Chapter 2

Espaces de Fréchet

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1.1 (Semi-norme). *Une semi-norme sur un espace vectoriel topologie est une application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui est sous-additive et positivement homogème, c'est à dire*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y); \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Une famille $\mathcal{P}$ de semi-normes est séparante si

$$p(x) = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P} \implies x = 0.$$

La topologie associée à une famille de semi-normes est la topologie dont les ouverts sont les parties O de E telles que pour tout $x \in O$, il existe une famille finie *et non-vide $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ et $r > 0$ tels que*

$$\{y \in E; p(x-y) < r \quad \forall p \in \mathcal{B}\} \subset O.$$

Une famille de semi-normes sur un espace vectoriel en fait donc un EVTLC.

Exemple 2.1.1.

- *Une norme est une semi-norme séparante.*
- *Si $E = C_b(\mathbb{R})$, alors les applications $p_x(f) := |f(x)|$ forment une famille séparante de semi-normes, qui induit la topologie de la convergence simple.*
- *La jauge d'un ouvert convexe symétrique définit une semi-norme.*

Proposition 2.1.2. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers x pour la topologie associée à la famille de semi-normes $\mathcal{P}$ ssi $p(x_n - x) \longrightarrow 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$.*

Théorème 2.1.3. *Soit E un EVTLC. Alors il existe une famille de semi-normes qui induit la topologie de E. De plus, cette topologie est séparée ssi la famille est séparante.*

Proof. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts convexes symétriques (qui donc en particulier contiennent 0). C'ets un système fondamental de voisinages de l'origine (et donc $x + \mathcal{C}$ est un système fondamental de voisinages de x). On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des jauges associées aux éléments de $\mathcal{C}$ (et on notera j_C la jauge associée au convexe C). C'est une famille de semi-normes, et on va montrer qu'elle induit la topologie de E.

Soit U un ouvert pour la topologie d'EVTLC et $x \in U$. Il existe $C \in \mathcal{C}$ tel que $x + C$ est un voisinage de x inclus dans U. Alors $B_{j_C}(x, 1) \subset x + C \subset U$ et donc U est un ouvert pour la topologie induite par la famille $\mathcal{P}$.

Réciproquement, si U est un ouvert pour la topologie induite par les semi-normes et $x \in U$, il existe $C_1, ..., C_k \in C$ tels que $\cap B_{j_{C_k}}(x, r) \subset U$. Alors $C = r \cap C_k$ est un ouvert convexe pour la topologie d'EVTLC, et $x + C \subset U$, donc U est un ouvert pour la topologie d'EVTLC.

Si la famille de semi-normes est séparante, alors étant donné $x, y \in E$ on peut trouver une semi-norme p telle que $p(x - y) = t > 0$. Alors les ensembles $\{z; p(x - z) < t/2\}$ et $\{z; p(y - z) < t/2\}$ séparent x et y.

Réciproquement, supposons la topologie séparée. Soient x_1 et x_2 deux poins distincts, et V_1 et V_2 deux voisinages qui les séparent. Il existe $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{P}$ et r_1, r_2 tels que

$$\{z; \sup_{p \in \mathcal{B}_i} p(x_i - z) < r_i\} \subset V_i.$$

En particulier, comme $x_2 \notin V_1$, pour au moins l'un des $p \in \mathcal{B}_1$ on a $p(x_1 - x_2) > r_1$, et donc la famille est séparante.

$\square$

Définition 2.1.4 (Topologie faible). *Soit E un espace vectoriel topologique et E^* l'ensemble des formes linéaires continues. La topologie faible, notée $\sigma(E, E^*)$ est la topologie sur E définie par la famille de semi-normes $p_A(x) = \sup_{f \in A} |f(x)|$ où les A sont les parties finies de E^*.*

Proposition 2.1.5. *La topologie faible est la topologie la moins fine rendant continue les éléments de E^*.*

Proof. Le fait que la topologie faible rende continus les éléments de E^* est immédiat. Pour la reciproque, soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts d'une topologie rendant continus tous les éléments de E^*, et soit A une partie finie de E^*. Soit $f \in A$. Comme f est continue pour la topologie $\mathcal{T}$, pour tout $x \in E$ et $r > 0$, l'ensemble $\{y; |f(x-y)| < r\}$ appartient à $\mathcal{T}$. Comme $\mathcal{T}$ est stable par intersections finies, la conclusion suit. $\square$

Sur un espace vectoriel normé de dimension finie, la topologie faible et la topologie forte coincident, mais c'est rarement le cas pour un espace vectoriel normé de dimension infinie (mais il y a des exemples où elles coincident, notamment l'espace ℓ^1 des suites réelles sommables).

Nous regarderons plus tard cette topologie plus en détails, notamment lorsque la topologie initiale est celle d'un espace de Banach.

Proposition 2.1.6. *Une partie A d'un EVTLC muni d'une famille séparante de semi-normes $(p_\alpha)_\alpha$ est bornée si et seulement si pour tout α il existe $C_\alpha > 0$ telle que*

$$p_\alpha(x) < C_\alpha \quad \forall x \in A.$$

Proof. Supposons A borné. Comme $V_\alpha = \{x; p_\alpha(x) < 1\}$ est un voisinage ouvert de l'origine, il existe C_α telle que $A \subset C \cdot V_\alpha$, et par homogénéité de p_α on a $p_\alpha(x) < C_\alpha$ pour tout $x \in A$.

Réciproquement, supposons que pour tout α il existe C_α telle que $p_\alpha(x) < C_\alpha \ \forall x \in A$. Alors étant donné un voisinage V de l'origine, comme il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n$ et $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ tels que

$$\cap_{j=1}^n \{x \in E; p_{\alpha_j}(x) < \varepsilon_j\} \subset V$$

on a $A \subset C \cdot V$ avec $C = 2\max_j C_{alpha_j}/\varepsilon_j$. $\square$

Une question naturelle est d'étudier les EVTLC qui ont de meilleures propriétés topologiques, et notamment d'être métrique complet.

Définition 2.1.7 (Espace de Fréchet). *Un espace est dit pré-Fréchet s'il est muni d'une famille de semi-normes qui est* dénombrable *et séparante, notée p_j, et telles que*

$$p_j \leqslant p_{j+1} \forall j$$

. La topologie associée est alors métrisable par la distance

$$d(x,y) := \sum 2^{-j} \min(p_j(x-y), 1).$$

Un espace est dit de Fréchet s'il est pré-Fréchet et complet.

Exemple 2.1.2.

- *Les espaces de Banach sont des espaces de Fréchet.*
- *Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, l'espace $C^\infty(K)$ est de Fréchet, muni des semi-normes*

$$p_j(x) := \sup_{|\alpha| \leqslant j} \sup_{x \in K} |\partial_\alpha f(x)|.$$

- *L'espace $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est de Fréchet, muni des semi-normes $||f||_{L^p(\bar{B}(0,n))}$.*
- *Un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet.*
- *Un produit dénombrable d'espaces de Fréchet est un espace de Fréchet.*

Exercice 2.1.1. *L'espace $\mathbb{R}^\infty$ de toutes le suites réelles muni des semi-normes $p_n(x) = |x_n|$ est un espace de Fréchet (et sa topologie est la topologie produit), mais n'est pas normable (et en particulier n'est pas un espace de Banach).*

Solution 2.1.1. *Le caractère Fréchet est immédiat. Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de norme sur cet espace. Supposons qu'il en existe une. Comme les applications $x \longrightarrow x_n$ sont continues, on peut poser c_n leur norme. Alors*

$$T_N : x \longrightarrow \sum_{1 \leqslant n \geqslant N} 2^{-n} c_n^{-1} x_n$$

vérifie $||T_N|| < 1$ pour tout N. En particulier, pour tout x on a

$$\sup_N \left| \sum_{1 \leqslant n \geqslant N} 2^{-n} c_n^{-1} x_n \right| < ||x||,$$

ce qui est absurde, car on peut aisément construire une suite telle que ce sup est infini.

Remarque 2.1.1. *La croissance des semi-normes n'est pas vraiment nécessaire, car on peut toujours remplacer p_k par $\sum_{j \leqslant k} p_j$. Cette hypothèse est néanmoins pratique car elle permet d'écrire la distance plus lisiblement, et car les ouverts de la topologie associée sont alors les ensembles O tels que*

$$\forall x \in 0, \ \exists \varepsilon > 0, k \in \mathbb{N} \ t.q. \ \{y; p_k(y-x) < \varepsilon\} \subset O.$$

Proposition 2.1.8. *Soient E et F deux espaces pré-Fréchet, avec (p_n) et (q_n) les familles respectives de semi-normes, et T une application linéaire de E vers F. Alors T est continue ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}$ tels que*

$$q_n(Tx) \leqslant Cp_j(Tx) \quad \forall x \in E.$$

Proof. Supposons que T soit continue. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un voisinage U de l'origine tel que

$$q_n(Tx) < 1 \forall x \in U.$$

Il existe également $j \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ tels que $\{p_j < \varepsilon\} \subset U$. Soit $x \in E$.

Si $p_j(x) = 0$ alors $p_j(\lambda x) = 0$ pour tout $\lambda > 0$et donc $\lambda x \in U$, d'où $q_n(\lambda Tx) < 1$ pour tout λ. On en déduit alors que $q(Tx) = 0$ aussi.

Si $p_j(x) > 0$ alors $\varepsilon x/(2p_j(x)) \in U$ et donc

$$q_n(Tx) = \frac{2p_j(x)}{\varepsilon} q_n\left(T(\varepsilon x/(2p_j(x)))\right) \leqslant \frac{2}{\varepsilon} p_j(x).$$

Réciproquement, supposons que pour tout n il existe j et C tels que $q_n(Tx) \leqslant Cp_j(Tx) \quad \forall x \in E$. Soit $x \in E$, et U un voisinage ouvert de Tx dans F. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{y \in F; q_n(Tx - y) < \varepsilon\} \subset U.$$

Par hypothèse il existe C et j tels que

$$p_j(x - x') < \frac{\varepsilon}{C} \Rightarrow q_n(Tx - Tx') < \varepsilon$$

et donc pour de tels x', $Tx' \in U$, et donc T est bien continue.

□

2.2 Théorème de Banach-Steinhaus et applications

Le but de cette section est d'énoncer des résultats vus dans le cours de topologie et calcul différentiel dans le cadre plus général des espaces de Fréchet.

Théorème 2.2.1 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit E (resp. F) un espace de Fréchet (resp. pré-Fréchet) dont la topologie est définie par la famille dénombrable de semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Soit T_α une famille d'applications linéaires continues de E dans F telles que pour tout $x \in E$ la famille $(T_\alpha(x))_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est bornée dans F. Alors $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est équi-continue : pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $C > 0$ et $j \in \mathbb{N}$ tels que $q_k(T_\alpha x) < Cp_j(x)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et pour tout $x \in E$.*

En particulier, si E et F sont des espaces de Banach, en considérant les deux normes associées on retrouve la version du théorème de Banach-Steinhaus vue dans le cours de topologie. La preuve fonctionne essentiellement de la même mani'ere dans ce cadre plus général.

Proof. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$E_n := \{x \in E; \quad \sup_\alpha q_k(T_\alpha(x)) \leqslant n\}.$$

Les E_n sont fermés et leur union est égale à E par hypothèse (via la Proposition 2.1.6). Par application du théorème de Baire, il existe N tel que $\mathrm{int}(E_n)$ soit non-vide. Il existe alors $x_0 \in E_n$, $j \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\{x; \quad p_j(x - x_0) < \varepsilon\} \subset E_N.$$

En prenant B_j la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour p_j, on a pour tout $x \in B_j$

$$q_k(T_\alpha x) = \varepsilon^{-1} q_k(T_\alpha \varepsilon x) \leqslant \varepsilon^{-1}(q_k(T_\alpha(\varepsilon x - x_0)) + q_k(Y_\alpha x_0)) \leqslant 2\varepsilon^{-1} N.$$

On conclut par homogénéité. □

Corollaire 2.2.2. *Soit E et F deux espaces de Fréchet, et (T_n) une famille d'applications linéaires continues de E dans F, convergeant simplement vers T. Alors T est une application linéaire continue de E dans F, et de plus si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E convergeant vers x, alors $T_n(x_n)$ converge vers $T(x)$.*

Proof. Comme pour tout $x \in E$ la suite $(T_n(x))$ est convergente donc bornée, par application du théorème de Banach-Steinhaus la famille (T_n) est équi-continue. La conclusion suit. □

Théorème 2.2.3 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soit T une application in-áire contnue surjective entre deux espaces de Fréchet. Alors elle est ouverte, c'est à dire que l'image d'un ouvert par T est encore un ouvert. Si de plus T est bijective, alors c'est un homeomorphisme.*

La preuve repose aussi sur le même principe que dans un espace de Banach.

Proof. On considère deux familles de semi-normes induisant les topologies de E et F, ainsi que les distance d_E et d_F proposées dans la définition des espaces de Fréchet. Nous allons montrer que

$$\forall r > 0, \quad \exists \rho > 0 \ \forall x \in E, \ B_F(Tx, \rho) \subset \overline{T(B_E(x, r))}.$$

On pourra ensuite conclure en appliquant le Lemme 2.2.4 ci-dessous. Comme T est linéaire et que les distances considérées sont invariantes par translation, il suffit de le montrer pour $x = 0$.

Comme T est linéaire surjective, $F = \cup_{n>1} n\overline{T(B_E(0, r/2))}$. Par le théorème de Baire, l'un de ces espaces est d'intérieur non-vide, et donc tous car les homothéties sont des homéomorphismes. Il existe donc $y \in F$ et $\rho > 0$ tels que

$$B_F(y, \rho) \subset \overline{T(B_E(0, r/2))}.$$

Alors

$$B_F(0, \rho) = -y + B_F(y, \rho) \subset -y + \overline{T(B_E(0, r/2))}$$

et donc, par linéarité et symétrie de T, on a

$$B_F(0, \rho) \subset \overline{T(B_E(0, r/2))} + T(B_E(\bar{0}, r/2)) \subset \overline{T(B_E(0, r))}$$

ce qui conclut la preuve. □

La preuve a utilisé le lemme suivant (qui n'utilise pas de structure linéaire sur E et F) :

Lemme 2.2.4. *Soit E un espace métrique complet, F un espace métrique et $T : E \longrightarrow F$ continue. Supposons que*

$$\forall r > 0, \quad \exists \rho > 0 \ \forall x \in E, \ B_F(Tx, \rho) \subset \overline{T(B_E(x, r))}.$$

Alors

$$\forall r > 0, \quad \exists \rho > 0 \ \forall x \in E, \ B_F(Tx, \rho) \subset T(B_E(x, 3r)).$$

Proof. Soient r et ρ associés comme dans l'hypothèse. On considère une suite ρ_n qui décroit vers 0, avec $\rho_0 = \rho$ et telle que

$$\forall x \in E, \ B_F(Tx, \rho_n) \subset \overline{T(B_E(x, 2^{-n}r))}.$$

Soit x fixé et $y \in B_F(Tx, \rho)$. Notre but est de montrer que $y \in T(B_E(x, 3r))$.

On va construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, initialisée à $x_0 = x$, et telle que $T(x_n) \in B_F(y, \rho_n)$ et $x_n \in B_E(x_{n-1}, 2^{1-n}r)$. Cette propriété est bien vraie pour $x_0 = x$. Supposons $x_0, ..., x_{n-1}$ construits. Alors

$$y \in B_F(T(x_{n-1}), \rho_{n-1}) \subset \overline{T(B_E(x_{n-1}, 2^{-n}r))}$$

par construction. On peut donc trouver un point de $B_E(x_{n-1}, 2^{-n}r)$ dont l'image par T est arbitrairement proche de y. Donc en particulier, il existe $x_n \in B_E(x_{n-1}, 2^{-n}r)$ tel que $T(x_n) \in B_F(y, \rho_n)$, ce qui termine la construction.

On a alors

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leqslant r \sum_{k=0}^{p-1} 2^{-n-k} < r2^{1-n}.$$

C'est donc une suite de Cauchy, donc elle est convergente vers une limite x'. De plus, $d(x, x') < 3r$ (en prenant $n = 0$ et $p \longrightarrow \infty$). Par continuité de T, et comme $d(T(x_n), y) \leqslant \rho_n \longrightarrow 0$, on en déduit que $T(x') = y$. Donc $y \in T(B_E(x, 3r))$, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 2.2.5 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soit T une application linéaire entre deux espaces de Fréchet. Alors elle est continue si et seulement si son graphe $G = \{(x, T(x));\ x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.*

Proof. Il est toujours vrai que si une application est continue alors son graphe est fermé.

Réciproquement, dans le cadre de ce théorème, si le graphe est fermé, c'ets un sous-espace vectoriel fermé dans l'espace de Fréchet $E \times F$, donc c'est aussi un espace de Fréchet.

La projection $\pi_1 : G \longrightarrow E$ qui a (x, y) associe x est continue, linéaire et bijective, donc un isomorphisme par le théorème de l'application ouverte. Comme $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ (où π_2 est la projection sur la deuxième coordonée), on en déduit que T est continue. □

2.3 Théorèmes de Hahn-Banach

2.3.1 Forme analytique

On donne d'abord la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, déjà vue dans le cours de topologie et calcul différentiel dans le cas des espaces vectoriels normés, et généralisée ici au cas des semi-normes.

Théorème 2.3.1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'une semi-norme p, et soit G un sous-espace vectoriel de E. Soit g une forme linéaire sur G telle que*

$$g(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire f sur E prolongeant g et telle que

$$f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E.$$

Proof. □

Corollaire 2.3.2. *Si f est une forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel G d'un espace vectoriel normé E, alors elle peut être prolongée à une forme linéaire continue sur E, de même norme que sur G.*

Proof. Il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach avec $p(x) = ||f||_{G^*}||x||_E$. □

Corollaire 2.3.3. *Soit E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E$. Il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $f(x_0) = ||x_0||_E^2$ et $||f||_{E^*} = ||x_0||_E$.*

Proof. On applique le théorème de Hahn-Banach à $g(tx_0) = t||x_0||^2$ (définie sur $\mathbb{R}x_0$). □

Corollaire 2.3.4. *Soit E un espace vectiriel normé. Alors*

$$\forall x \in E, \quad ||x||_E = \sup_{||f||_{E^*} \leqslant 1} f(x) = \max_{||f||_{E^*} \leqslant 1} f(x).$$

Proof. Par définition de la norme duale on a $||x|| \geqslant \sup_{||f||_{E^*} \leqslant 1} f(x)$. En prenant la forme linéaire définie dans le corollaire précédent et en divisant par $||x||_E$ on obtient l'égalité. □

Corollaire 2.3.5. *Soit E un espace vectoriel normé. La topologie faible sur E est séparée.*

Proof. Soit x et y deux éléments distincts de E. Comme $||x - y||_E \neq 0$, d'après le corollaire précédent il existe une forme linéaire continue f telles que $f(x - y) \neq 0$. La famille de semi-normes définissant la topologie faible est donc séparante, et donc la topologie faible est séparée. □

En particulier, la topologie faible sur un espace vectoriel normé en fait un EVTLCS.

2.3.2 Forme géométrique

Nous allons maintenant voir la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.

Définition 2.3.6. *Un hyperplan affine fermé d'un espace vectoriel topologique est un sous-espace affine H de la forme $\{x; f(x) = \alpha\}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et f est une forme linéaire continue non-nulle.*

Un hyperplan affine $H = \{x; f(x) = \alpha\}$ sépare deux ensembles A et B si $A \subset \{f \leqslant \alpha\}$ et $B \subset \{f \geqslant \alpha\}$.

Un hyperplan affine $H = \{x; f(x) = \alpha\}$ sépare strictement deux ensembles A et B si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \subset \{f \leqslant \alpha - \varepsilon\}$ et $B \subset \{f \geqslant \alpha + \varepsilon\}$.

Théorème 2.3.7. *Soit E un espace vectoriel topologique, et A et B deux convexes disjoints de E.*

1. *Si A est ouvert alors il existe un hyperplan affine fermé séparant A et B.*
2. *Si E est localement convexe, A est compact et B est fermé, alors il existe un hyperplan affine fermé séparant strictement A et B.*

La preuve s'appuiera sur le lemme suivant :

Lemme 2.3.8. *Soit E un EVT, C un ouvert convexe non vide de E, et $x_0 \notin C$. Alors il existe une forme linéaire continue sur E telle que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.*

Autrement dit, il existe un hyperplan séparant $\{x_0\}$ et C (au sens large).

Proof. Quitte à translater, on peut supposer $0 \in C$, et donc que C est un voisinage de l'origine. Soit j_C la jauge de C et g la forme linéaire sur $\mathbb{R}x_0$ définie par $g(tx_0) = t$. Comme $x_0 \notin C$, on a $j_C(x_0) \geqslant 1$, et donc $j_C(tx_0) \geqslant g(tx_0)$ pour $t \geqslant 0$. Cette inéalité étant trivialement vraie pour les t négatifs, on peut appliquer la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, et soit f la forme linéaire prolongeant g ainsi obtenue. Il nous reste à montrer que f est continue.

Si $x \in \varepsilon C \cap (-\varepsilon C)$, alors

$$|f(x)| \leqslant j_C(x) \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que f est continue en 0, et donc partout. $\square$

Preuve du Théorème 2.3.7 . Commençons par le premier cas. Soit A convexe ouvert, et B convexe non vide avec $A \cap B = \varnothing$. Soit $C = \{a - b; a \in A, b \in B\}$ c'est un convexe non-vide, et ouvert car $C = \cup_{y \in B}(A - y)$. C ne contient pas 0 car A et B sont disjoints. En appliquant le lemme précédent avec $x_0 = 0$, il existe une forme linéaire continue f telle que $f < 0$ sur C. Donc $f(a) < f(b)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. En prenant $\alpha = \sup_A f(a) \leqslant \inf_B f(b)$, on voit que l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large. Cet hyperplan est fermé car f est continue.

Supposons maintenant A compact et B fermé. Comme B est fermé, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage ouvert V_x de 0 tel que $(x + V_x) \cap B = \varnothing$. Par continuité de $(x, y) \longrightarrow x + y$, il existe un voisinage ouvert convexe symétrique W_x de 0 tel que $W_x + W_x \subset V_x$.

Comme A est compact, il existe $x_1, ..., x_n \in A$ tels que $A \subset \cup_i (x_i + W_{x_i})$. En posant $W = \cap W_{x_i}$, on a $A + W$ disjoint de B car si $x \in A + W$, il existe i tel que $x \in (x_i + W_{x_i} + W_{x_i}) \subset (x_i + V_{x_i})$. Comme $A + W$ est un ouvert convexe, on peut le séparer au sens large de B, et donc il existe une forme linéaire continue f telle que

$$f(a) + f(w) \leqslant f(b) \quad \forall a \in A, w \in W, b \in B.$$

Comme f est non nulle et W est un voisinage ouvert symétrique de l'origine, il existe $w \in W$ tel que $f(w) > 0$, ce qui permet de conclure. $\square$

Corollaire 2.3.9. *Soit $x \in E$ et C un convexe de E. Alors $x \in \bar{C}$ ssi*

$$\forall f \in E^*, \quad f(x) \leqslant \sup_{y \in C} f(y).$$

Proof. Par contradiction, si $x \notin \bar{C}$, on pourrait trouver un hyperplan qui sépare strictement $\{x\}$ de $\bar{C}$. $\square$

2.4 Dualité et topologie faible

Définition 2.4.1. *Soit E un EVTLCS, et E^* son dual. On appelle topologie forte sur E^* la topologie définie par la famille de semi-normes*

$$q_B(f) = \sup_{x \in B} |f(x)|; \quad B \subset E \textit{ borné.}$$

On appelle topologie faible- sur E^* la topologie définie par la famille de semi-normes*

$$q_x(f) = |f(x)|, \quad x \in E.$$

On peut aussi considérer la topologie faible sur E^*, relativement au bidual E^{**}. Cette topologie est plus faible que al topologie forte, mais plus forte que la topologie faible-*.

Si E est un espace vectoriel normé, la topologie forte sur E^* coincide avec celle définie par la norme $||f||_{E^*} = \sup_{||x||_E \leqslant 1} f(x)$.

Un des avantages de la topologie faible-$*$ est que la compacité est une propriété aisément vérifiée :

Théorème 2.4.2 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Soit E un EVTLCS, U un voisinage de 0 et*

$$K := \{f \in E^*; \ |f(x)| \leqslant 1 \ \ \forall x \in U\}.$$

Alors K est compact pour la topologie faible- sur E^*.*

Si E est un espace de Banach, on peut prendre pour U la boule unité. Le critère de compacité est alors d'être borné pour la norme opérateur (pas pour la topologie faible-*) et fermé.

Proof. Soit p une semi-norme continue sur E telle que $B_p := \{p \leqslant 1\} \subset U$. On a $K \subset K_0$ avec

$$K_0 := \{f \in E^*; \ |f(x)| \leqslant 1 \ \ \forall x \in B\} = \{f \in E^*; \ |f(x)| \leqslant p(x) \ \ \forall x \in E\}.$$

Comme K est un sous-ensemble fermé de K_0, il suffit de montrer que K_0 est compact. Soit $Y = \mathbb{R}^E$ muni de la topologie produit, et $\Phi : E^* \longrightarrow Y$ définie par $\Phi(f) = (f(x))_{x \in E}$. C'est une application linéaire injective, continue lorsqu'on munit E^* de la topologie faible-*. Et comme la topologie faible-* est basée sur l'évaluation en chaque point, Φ^{-1} est continue sur $\Phi(E^*)$. Il nous suffit donc de montrer que $\Phi(K_0)$ est compact.

On a $\Phi(K_0) = A \cap B$ avec

$$A := \{\omega \in Y; \quad |\omega_x| \leqslant p(x) \ \ \forall x \in E\} = \prod_{x \in E} [-p(x), p(x)];$$

$$B := \{\omega \in Y; \quad \omega_{x+\lambda y} = \omega_x + \lambda \omega_y \ \ \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

A est compact par application du théorème de Tychonov, et B est fermé par continuité des projections canoniques. Donc $\Phi(K_0)$ est bien compact, ce qui termine la preuve. □

Il est souvent plus aisé d'utiliser la compacité séquentielle, ce qui est permis par le résultat suivant :

Proposition 2.4.3. *Soit E un EVTLCS séquentiellement séparable, et p une semi-norme continue sur E. Alors la topologie faible-* sur E^* est métrisable sur $\{f ß E^*;\ |f(x)| \leqslant p(x)\ \ \forall x \in E\}$.*

A noter qu'on a la métrisabilité sur les ensembles bornés, mais pas forcément sur l'espace tout entier. Si l'espace de base n'est pas séparable, il est possible que on n'ait pas la compacité séquentielle des ensembles bornés de E^* pour la topologie faible-* (bien qu'on ait la compacité).

Proof. Notons $K = \{f \in E^*;\ |f(x)| \leqslant p(x)\ \forall x \in E\}$. Soit $(x_n)_n$ une famille dénombrable dense dans $B = \{p \leqslant 1\} \subset E$. On considère la distance définie par

$$d(f,g) := \sum_n 2^{-n} |f(x_n) - g(x_n)|.$$

On v'erifie aisément que c'est bien une distance. Montrons qu'elle métrise bien la topologie faible-* sur K. Soit $f \in K$ et $r > 0$, le but est de montrer que $B(f,r)$ (la boule de centre f et de rayon r pour la distance d) est bien un voisinage de f pour la topologie faible-*.

Soit N tel que $\sum_{n \geqslant N} 2^{-n} < r/4$ et

$$V_{r/4,N} := \{g \in E^*;\ \sup_{i \leqslant N} |g(x_i) - f(x_i)| < r/4\}.$$

$V_{r/4,N} \cap K$ ets un voisinage de f pour la topologie faible-*, contenu dans $B(f,r)$. Réciproquement, montrons que tout voisinage de f pour la topologie faible-* contient une boule ouverte centrée en f. Soit $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et $y_1, ..., y_k \in E$. On pose

$$U = \{g \in E^*;\ \sup_{i \leqslant k} |(g-f)(y_i)| < \varepsilon\}$$

le voisinage de f associé. Pour $i = 1, ..., k$ il existe n_i tel que $p(x_{n_i} - y_i) < \varepsilon/4$. Posons $r = \min_{i \leqslant k} \varepsilon 2^{-n_i - 1}$. Si $g \in B(f,r)$ alors pour tout $i \in \{1, ..., k\}$ on a

$$|(f-g)(y_i)| \leqslant |(f-g)(x_{n_i})| + 2p(y_i - x_{n_i}) \leqslant 2^{n_i} r + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

On a donc bien $B(f,r) \subset U \cap K$. $\square$

En combinant le théorème de Banach-Alaoglu et la métrisabilité de la topologie, on obtient :

Proposition 2.4.4. *Si p est une semi-norme sur E et si une suite (f_n) d'applications linéaires continues vérifie*

$$f_n(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E$$

alors on peut en extraire une sous-suite convergente pour la topologie faible-.*

Remarque 2.4.1. *L'hypothèse de cette proposition n'est pas d'être borné au sens de la topologie faible-*.*

A noter que si l'espace est de Fréchet, en pratique le théorème de Banach-Steinhaus permet de vérifier le caractère borné d'une famille d'applications linéaires.

Exemple 2.4.1. *Le dual de* L^p *est* L^q *avec* $p^{-1}+q^{-1}=1$ *lorsque* $p>1$*. Lorsqu'on a une suite bornée dans* L^p*, on veut extraire une sous-suite telle que il existe* $f\in L^p$ *avec*

$$\int f_n g dx \longrightarrow \int f g dx$$

pour tout $g\in L^q$*. En revanche, on n'a pas forcément* $||f_n||_p \longrightarrow ||f||_p$ *(et donc pas de compacité forte).*

Chapter 3

Espaces de Banach

Dans tout ce chapitre, E sera un espace de Banach.

3.1 Topologies faibles sur les espaces de Banach

3.1.1 Topologie faible

Notation. *Si une suite* (x_n) *converge faiblement vers* x*, on notera* $x_n \rightharpoonup x$.

A note que comme la topologie faible est séparée, une limite faible est nécessairement unique.

Proposition 3.1.1. *Dans un espace de Banach*

1. *la convergence forte implique la convergence faible;*
2. *une suite faiblement convergente est bornée;*
3. *si* $x_n \rightharpoonup x$ *alors* $||x|| \leqslant \liminf ||x_n||$*;*
4. *si* $x_n \rightharpoonup x$ *et si* $f_n \longrightarrow f$ *dans* E^* *(au sens de la norme opérateur) alors* $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$*.*

La convergence faible d'une suite n'implique pas la convergence forte, sauf en dimension finie et dans quelques cas très particuliers (comme l'espace ℓ^1).

Proof. La première partie est vraie par définition. Pour la seconde partie, on utilise le Corollaire 2.3.4 et le théorème de Banach-Steinhaus : en définissant $T_n(f) = f(x_n)$, on voit que c'est une suite bornée pour tout f, donc ces opérateurs sont uniformément bornés sur E^* : il existe $C > 0$ tel que $|f(x_n)| \leqslant C||f||_*$ pour tout n et f. Mais comme

$$||x|| = \sup_{||f||_* \leqslant 1} f(x)$$

on peut conclure. De plus, si $x_n \rightharpoonup x$ alors

$$\begin{aligned} ||x|| &= \sup_{||f||_* \leqslant 1} f(x) \\ &= \sup_{||f||_* \leqslant 1} \lim_n f(x_n) = \sup_{||f||_* \leqslant 1} \liminf_n f(x_n) \\ &\leqslant \sup_{||f||_* \leqslant 1} \liminf_n ||f||_* ||x_n|| = \liminf_n ||x_n||. \end{aligned}$$

Pour la dernière partie, on a

$$\begin{aligned}|f_n(x_n) - f(x)| &\leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leqslant ||f_n - f||_* \sup_k ||x_k|| + |f(x_n) - f(x)|\end{aligned}$$

et le caractère borné de la suite (x_n) permet de conclure. □

Lemme 3.1.2. *Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Alors l'adhérence de la sphère unité $S := \{x; ||x|| = 1\}$ pour la topologie faible est la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$.*

En particulier, en dimension infinie la topologie forte et la topologie faible ne coincident pas.

Proof. Soit x_0 avec $||x_0|| < 1$. Le but est de montrer que tout voisinage de x_0 pour la topologie faible intersecte S. Soit V un tel voisinage. Par définition de la topologie faible, il existe une famille finie de forme linéaires $f_1, ..., f_k$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\{x;\ \max_i |f_i(x - x_0)| < \varepsilon\} \subset V$. Comme l'espace est de dimension infinie, il existe y non-nul tel que $f_i(y) = 0$ pour tout i. Alors il existe $t \neq 0$ tel que $||x_0 + ty|| = 1$ (par continuité de la norme) et $x_0 + ty \in V$ (car $f_i(x_0 + ty) = f_i(x_0)$ pour tout i), ce qui conclut la preuve. □

De manière plus général, on a montré qu'en dimension infinie, tout ensemble d'intérieur non-vide pour la toplogie faible contient un sous-espace affine non-trivial. En particulier, dans un espace de Banach de dimension infinie, les voisinages faibles ne sont jamais bornés pour la topologie forte. Ceci justifie par exemple qu'on ne peut pas utiliser les jauges pour munir la topologie faible d'une norme.

En revanche, si on part d'un ensemble convexe, on évite ce genre de phénomène :

Proposition 3.1.3. *Soit C un sous-ensemble convexe d'une espace de Banach, fermé pour la topologie forte. Alors il est faiblement fermé.*

A noter que la réciproque est vraie en général : un ensemble faiblement fermé est fortement fermé.

Proof. Il nous faut montrer que $E\backslash C$ est faiblement ouvert, c'est à dire que si $x \in E\backslash C$ il existe un voisinage faible de x qui est inclus dans $E\backslash C$. D'après la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan fermé qui sépare C et $\{x\}$, donc a fortiori une forme linéaire continue tel que $\{y;\ |f(y) - f(x)| < \varepsilon\}$ n'intersecte pas C. On a donc bien un voisinage faible qui convient. □

Corollaire 3.1.4 (Lemme de Mazur). *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge faiblement vers x. Alors il existe une suite (y_n) telle que $y_n \in \mathrm{conv}(\{x_k, k \geqslant n\})$ qui converge fortement vers x.*

Proof. Soit C_n l'enveloppe convexe des x_k pour $k \geqslant n$. $\bar{C}_n$ est un convexe fortement fermé, donc faiblement fermé, et c'est a fortiori aussi le cas pour $\cap_n \bar{C}_n$. Mais comme x est dans l'adhérence faible des C_n, la conclusion suit. □

Exercice 3.1.1. *Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et s.c.i. pour la topologie forte. Montrer qu'elle est s.c.i. pour la topologie faible.*

Solution 3.1.1. *Comme f est convexe et fortement s.c.i., ses ensembles de sous-niveaux $\{f \leqslant \lambda\}$ sont convexes et fortement fermés, donc faiblement fermés. On en déduit que f est faiblement s.c.i.*

Exercice 3.1.2. *Soit E et F deux espaces de Banach, et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors T est continue pour les topologies fortes sur les deux espaces ssi elle est continue pour les topologies faibles sur les deux espaces.*

Solution 3.1.2. *Supposons T fortement continue. Soit $f \in F^*$. Alors $f \circ T$ est une forme linéaire fortement continue sur E, donc faiblement continue. Soit U un ouvert faible de F. Il est de la forme*

$$U = \cup_{k\in K} \cap_{i\in I_j} f_i^{-1}(w_j)$$

où les I_j sont finis, $f_i \in F^*$ et les w_j sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Alors

$$T^{-1}(U) = \cup_{k\in K} \cap_{i\in I_j} (f_i \circ T)^{-1}(w_j)$$

est donc un ouvert faible de E, et donc T est continue pour les topologies faibles.

Réciproquement, si T est continue pour les topologies faibles, son graphe est faiblement fermé, et donc fortement fermé. On conclut en appliquant le théorème du graphe fermé.

3.1.2 Topologie faible-$*$

Proposition 3.1.5. *La topologie faible-$*$ sur E^* est la topologie la moins fine rendant continue les applications*

$$f \in E^* \longrightarrow f(x), \quad x \in E.$$

On peut aussi munir E^* de sa topologie faible, par rapport au bidual E^{**}. La topologie faible-* est en général plus faible que la topologie faible.

Notation. *Etant donné $x \in E$, on notera $j(x)$ l'élément de E^{**}*

$$f \longrightarrow f(x).$$

Proposition 3.1.6. *E est isométrique à un sous-espace de E^{**} via le plongement canonique $x \longrightarrow j(x)$.*

Remark 3.1.1. *Comme E est complet, en particulier $j(B_E)$ est (fortement) fermé (par exemple comme conséquence du théorème de l'application ouverte).*

La preuve ci-dessous de ce résultat utilise le théorème de Hahn-Banach, et donc l'axiome du choix. Si on souhaite travailler sans l'axiome du choix, les espaces de Banach pour laquelle cette preuve marche sont appelés espaces linéairement normalisables [8, Définition VII-77].

Proof. Il faut seulement montrer que $||x||_E = ||\tilde{x}||E^{**}$. Pour tout $f \in E^*$, on a $|f(x)| \leqslant ||f||_{E^*}||x||_E||$ donc $||\tilde{x}||_{E^{**}} \leqslant ||x||_E$. Il nous reste à démontrer l'inégalité inverse. En considérant l'extension de la forme linéaire $f(\lambda x) = \lambda||x||_E$ sur $\mathbb{R}x$ donnée par la forme analytique du théorème de Hahn-Banach, on a une forme linéaire de norme 1 telle que $\tilde{x}(f) = f(x) = ||x||_E$. Donc $||\tilde{x}||_{E^{**}} \geqslant ||x||_E$, ce qui conclut la preuve. □

Par abus de langage, on identifiera dorénavent souvent x et $j(x)$.

Il peut très bien y avoir des éléments de E^{**} qui ne sont pas associés à des éléments de E. Par exemple, on verra plus tard que le bidual de l'espace L^1 est strictement plus gros que L^1 en général (en utilisant l'axiome du choix, via le théorème de Hahn-Banach).

On peut se demander à quel point E^{**} est plus grand que E. Il s'avère que les éléments de $E^{*}*$ peuvent être approchés par des éléments de E, au sens suivant :

Théorème 3.1.7 (Lemme de Goldstine)**.** *Soit ζ un élément de E^{**}, $f_1, ..., f_N$ une famille finie d'éléments de E^* et $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N > 0$. Alors il existe $x \in E$ tel que $||x|| \leqslant ||\zeta||$ et $|f_i(x) - \zeta(f_i)| < \varepsilon_i$ pour tout $i \in \{1, ..., N\}$. En d'autres termes, E est dense dans E^{**} pour la topologie faible-$*$.*

Attention, ça ne donne pas d'approximation sur une famille infinie de formes linéaires, donc on n'a pas de borne sur $||x-\zeta||_{E^{**}}$. C'est normal, E n'est en général pas dense dans E^{**} pour la topologie forte.

Proof. Sans perdre de généralité, supposons que $||\zeta|| = 1$. Soit $\Phi(x) = (f_i(x))_{i=1..N}$ et $z = (\zeta(f_i))_{i=1..N}$. Nous allons montrer que $z \in \overline{\Phi(B(0,1))}$ en utilisant le Corollaire 2.3.9 car $\Phi(B(0,1))$ est un convexe de $\mathbb{R}^N$. Soit g une forme linéaire sur $\mathbb{R}^N$, qui peut s'écrire comme le produit scalaire avec un vecteur $(\alpha_1, ..., \alpha_N)$. On a

$$g(z) = \sum \alpha_i \zeta(f_i) = \zeta\left(\sum \alpha_i f_i\right) \leqslant \left|\left|\sum \alpha_i f_i\right|\right|$$

car $||\zeta|| = 1$. Mais

$$\sup_{\Phi(B(0,1))} g(y) = \sup_{||x||<1} g(\Phi(x)) = \sup_{||x||<1} \sum \alpha_i f_i(x) = \left|\left|\sum \alpha_i f_i\right|\right|.$$

On a donc bien $g(z) \leqslant \sup_{\Phi(B(0,1))} g(y)$ pour tout $g \in (\mathbb{R}^N)^*$, et on peut conclure en appliquant le Corollaire 2.3.9. □

3.2 Espaces réflexifs

Définition 3.2.1 (Espace réflexif)**.** *Un espace de Banach est dit réflexif si l'application j définie dans la Notation 3.1.2 est surjective.*

En d'autres termes, un espace est réflexif si on peut l'identifier avec son bidual via l'application j. Les espaces L^p avec $1 < p < \infty$ sont réflexifs (puisque $(L^p)^* = L^q$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$ dans ce cas), mais L^1 et L^∞ ne le sont pas en général (on verra les preuves plus tard).

Remark 3.2.1. *C'est spécifiquement l'application j qui est une isomtrie entre E et E^{**}. Il existe des espaces non réflexifs (en particulier, un espace connu sous le nom d'espace de James) tels que E soit quand même isométrique à E^{**}.*

Exemple 3.2.1. *Les espaces de Hilbert sont réflexifs, comme conséquence du théorème de représentation de Riesz.*

Exemple 3.2.2. *L'espace $(C_b([-1,1], \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ n'est pas réflexif. En effet, s'il l'était, pour toute forme linéaire ℓ sur cet espace, il existerait une fonction f telle que*

$$||\ell||_{op} = \ell(f)$$

, d'après le Corollaire 2.3.4. Soit

$$\ell(g) = \int_{-1}^{0} g(t)dt - \int_{0}^{1} g(t)dt.$$

Trivialement, $||\ell|| \leqslant 2$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut aisément trouver une fonciton g telle que $\ell(g) \geqslant 2 - \varepsilon$ et $||g||_\infty \leqslant 1$. Donc $||\ell|| = 1$. Mais on peut aussi aisément vérifier que il n'existe aucune fonciton g avec $||g||_\infty \leqslant 1$ et $\ell(g) = 2$. On a donc une contradiction, et donc $(C_b([-1,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ n'est pas réflexif.

Théorème 3.2.2 (Théorème de Kakutani). *Un espace de Banach est réflexif si et seulement si sa boule unité est compacte pour la topologie faible.*

Proof. Commençons par montrer que si l'epsace est réflexif, la boule unité est compacte. On peut identifier E et E^{**} (et donc leurs boules unité) via l'isométrie j. En particulier, la boule unité de E^{**} est faible-* compacte, par le théorème de Banach-Alaoglu. Il suffit alors de montrer que j^{-1} est continue de $B_{E^{**}}$ (muni de la topologie faible-*) vers E (muni de la topologie faible) pour conclure. Ceci revient à montrer que pour tout $f \in E^*$, $z \longrightarrow f(j^{-1}(z))$ est continue pour la topologie faible-* sur E^{**}. Or si $z \in E^{**}$, il existe $x \in E$ tel que $z = j(x)$. Donc

$$f(j^{-1}(z)) = f(x) = z(f)$$

donc $f \circ j^{-1}$ est bien continue pour la topologie faible-*.

Réciproquement, supposons que la boule unité de E est faiblement compacte. Comme J est continue pour les topologies fortes et qu'elle est linéaire, elle est continue pour les topologies faibles (cf. Exercice 3.1.2). Comme la topologie faible-* sur E^** est moins fine que la topologie faible sur E^{**} (relativement à l'espace E^{***}), j est continue de E (muni de sa topologie faible) vers E^{**} muni de sa topologie faible-*. En particulier, $j(B_E)$ est alors compacte pour la topologie faible-*. Mais comme d'après le lemme de Goldstine $j(B_E)$ est dense dans $B_{E^{**}}$ pour la topologie faible-*, on a $j(B_E) = B_{E^{**}}$, et donc $j(E) = E^{**}$. □

Corollaire 3.2.3. *Soit E un espace réflexif, et K une partie bornée et faiblement fermée de E. Alors K est faiblement compacte.*

En particulier, si K est convexe, fortement fermée et bornée, elle est faiblement compacte.

Proof. K est incluse dans une boule, qui est faiblement compacte d'après le théorème de Kakutani, donc K est relativement compacte pour la topologie faible. Comme elle est faiblement fermée, elle est alors faiblement compacte.

La seconde partie suit car les convexes fortement fermés sont faiblement fermés, d'après la Proposition 3.1.3. □

Corollaire 3.2.4. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace réflexif. Alors F (muni de la topologie induite par la norme sur E) est réflexif.*

Proof. La boule unité de F est convexe et fortement fermée, donc faiblement fermée. Elle est aussi relativement compacte pour la topologie faible. Donc elle est faiblement compacte, donc F est réflexif d'après e théorème de Kakutani. □

Corollaire 3.2.5. *Soit E un espace de Banach. Alors E ets réflexif si et seulement si E^* est réflexif.*

Proof. Si E est réflexif, la topologie faible-* sur E^* coincide avec sa topologie faible (relativement à $E^**=E$). Comme sa boule unité est faible-* compacte, elle est faiblement compacte, et donc E^* est réflexif d'après le théorème de Kakutani.

Réciproquement, si E^* est réflexif, alors E^{**} l'est aussi d'après le cas précédent. Et comme j est une isométrie, $j(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E^{**}, donc est réflexif d'après le Corollaire 3.2.4. $\square$

Corollaire 3.2.6. *Soit E un espace de Banach réflexif, C un convexe fermé de E, et $f : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe semi-continue inférieurement, non-identiquement égale à $+\infty$, et telle que*

$$\lim_{||x||\to\infty, x\in C} f(x) = +\infty.$$

Alors f admet un minimum.

La condition de croissance à l'infini est automatiquement vraie si on suppose que C est borné.

Proof. Soit $x \in E$ tel que $f(x) < \infty$. Alors $A := \{y; f(y) \leqslant f(x)\}$ est un convexe fortement fermé, et borné, donc faiblement compact. Comme f est convexe et fortement s.c.i., elle est faiblement s.c.i., et donc f atteint un minimum sur A, qui est aussi un minimum global. $\square$

Théorème 3.2.7. *Soit E un espace de Banach. Si E^* est séparable alors E l'est.*

Proof. Soit (f_n) une suite dénombrable dense. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in E$ tel que $||x_n|| = 1$ et $f_n(x_n) \geqslant ||f_n||/2$. Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires de x_n à coefficients rationnels, qui est par construction dénombrable. Montrons que F est dense dans E. Il suffit de montrer que $G = \mathrm{Vect}(\{x_n, n \in \mathbb{N}\})$ est dense dans E. D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que toute forme linéaire continue nulle sur G est nulle sur E.

Soit $\varepsilon > 0$ et f une forme linéaire continue nulle sur G, et f_n telle que $||f_n - f|| \leqslant \varepsilon/3$. Alors

$$||f|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + ||f_n|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2f_n(x_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2(f_n - f)(x_n) \leqslant \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, f est nulle sur E. $\square$

Corollaire 3.2.8. *Si E est un espace de Banach réflexif et séparable, alors son dual est séparable.*

Ce résultat peut être faux sans l'hypothèse de réflexivité. On verra plus tard que $L^1(\mathbb{R})$ est séparable mais que son dual $L^\infty(\mathbb{R})$ ne l'est pas.

Proof. Comme E est réflexif et séparable, E^{**} est séparable, et donc E^* l'est par le Théorème 3.2.7. $\square$

Corollaire 3.2.9. *Soit (x_n) une suite bornée dans un espace de Banach réflexif E. Alors elle admet une sous-suite faiblement convergente.*

Proof. Soit $F = \overline{\mathrm{Vect}(\{x_n, n \in \mathbb{N}\}}$. F est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace réflexif, donc est réflexif. De plus, il est séparable par construction. Donc F^* est aussi séparable, et la topologie faible-* sur son dual est métrisable. Mais comme F est réflexif, cette topologie coincide avec la topologie faible sur F, qui est donc métrisable.

Comme de plus la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte pour la topologie faible, elle admet une sous-suite faiblement convergente dans F, et donc dans E. □

3.3 Espaces uniformément convexes

3.3.1 Propriétés principales

Définition 3.3.1 (Espace uniformément convexe)**.** *Un espace de Banach est dit uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in B_E$, si $||x - y|| \geqslant \varepsilon$ alors*

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| \leqslant 1 - \delta.$$

Cette propriété d'uniforme convexité peut être visualisée comme disant que la boule unité est "'bien ronde"'. Nous verrons plus tard que les epsaces L^p sont uniformément convexes si $1 < p < +\infty$.

Exemple 3.3.1. *Les espaces de Hilbert sont uniformément convexes, via l'identité du parallélogramme:*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

La motivation principale pour cette notion dans ce cours est que c'est un critère utile pour démontrer la réflexivité :

Théorème 3.3.2 (Milman-Pettis)**.** *Les espaces de Banach uniformément convexes sont réflexifs.*

Remark 3.3.1. *La réciproque ne peut pas être vraie, car la réflexivité est une notion topologique (par exemple comme conséquence du théorème de Kakutani), donc invariante par changement de norme équivalente, alors que l'uniforme convexité ne l'est pas. Par exemple, $\mathbb{R}^d$ muni de la norme ℓ^2 est uniformément convexe, mais ne l'est pas si on le munit de la norme ℓ^1 ou ℓ^∞.*

Proof. Soit E un espace uniformément convexe. Le but est de montrer que $j(B_E) = B_{E^{**}}$. Comme $j(B_E)$ est (fortement) fermé et convexe, il suffit de montrer que tout élément de la sphère unité de E^{**} est dans l'adhérence (forte) de $j(B_E)$.

Soit $\zeta \in E^{**}$ avec $||\zeta||_{E^{**}} = 1$ et $\varepsilon > 0$. Nous allons justifier l'existence de $x \in E$ tel que $||j(x) - \zeta||_{E^{**}} \leqslant \varepsilon$. Comme E est uniformément convexe, il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in B_E$ avec $||x - y|| \geqslant \varepsilon$ alors $||x + y|| \leqslant 2 - 2\delta$.

Soit $f \in E^*$ tel que $||f|| = 1$ et $\zeta(f) \geqslant 1 - \delta/2$. D'après le lemme de Goldstine, il existe $x \in E$ tel que

$$|\eta(f) - f(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

Supposons que $\zeta \notin \bar{B}_{E^**}(j(x), \varepsilon)$ (la boule fermée de centre $j(x)$ et rayon ε pour $||\cdot||_{E^{**}}$). Comme $E^{**}\backslash\bar{B}_{E^**}(j(x), \varepsilon)$ est ouvert pour la topologie faible-* sur E^{**} (car les boules fortement fermées sont faible-* fermées, par exemple comme conséquence du théorème de Banach-Alaoglu), d'après le lemme de Goldstine il existe y vérifiant

$$||y|| \leqslant ||\eta|| = 1; \quad ||j(x) - j(y)|| = ||x - y|| > \varepsilon; \quad |\zeta(f) - f(y)| < \frac{\delta}{2}.$$

En utilisant l'uniforme convexité, on a

$$||x + y|| \leqslant 2 - 2\delta.$$

Mais on a aussi

$$1 - \frac{\delta}{2} \leqslant \zeta(f) < \frac{f(x) + f(y)}{2} + \frac{\delta}{2} \leqslant \frac{||x + y||}{2} + + \frac{\delta}{2} \leqslant 1 - \frac{\delta}{2}.$$

On a donc une contradiction. Donc $\zeta \in \bar{B}_{E^{**}}(j(x), \varepsilon)$, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 3.3.3. *Dans un espace de Banach uniformément convexe, une suite converge fortement ssi elle converge fortement et la suite des normes converge vers la norme de la limite faible.*

Dans la litérature, on appelle parfois ce type de propriété la propriété de Radon-Riesz.

Proof. La convergence forte implique la convergence faible et la convergence des normes sur les epsaces de Banach généraux, puisque la norme est une application 1-lipschitz. Il nous faut donc juste démontrer la réciproque.

Soit $x_n \rightharpoonup x$ telle que $||x_n|| \longrightarrow ||x||$. Si $x = 0$ la convergence forte est évidente, donc on peut supposer sans perdre de généralité que $x \neq 0$. Posons $\lambda_n := \max(||x_n||, ||x||)$, qui converge vers $||x||$, $y_n = \lambda_n^{-1} x_n$ et $y = x/||x||$. On a $(y_n + y)/2 \rightharpoonup y$, donc

$$\liminf \left|\left| \frac{y_n + y}{2} \right|\right| \geqslant ||y|| = 1.$$

Mais comme $||y_n|| \leqslant 1$, on a alors

$$\left|\left| \frac{y_n + y}{2} \right|\right| \longrightarrow 1.$$

L'uniforme convexité implique alors que $||y_n - y|| \longrightarrow 0$, ce qui implique que $||x_n - x|| \longrightarrow 0$. □

Théorème 3.3.4 (Projection sur un fermé)**.** *Soit E un espace de Banach uniformément convexe, et C un convexe fermé non-vide. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que*

$$p_C(x) \in \arg\min_{y \in C} ||y - x||.$$

L'existence est en fait vraie dans les espaces réflexifs, mais l'unicité utilisera l'uniforme convexité. La fonction p_C joue le rôle de la projection dans le théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert, vu dans le cours de Topologie et Calcul Différentiel.

Proof. Sans perdre de généralité, il nous suffit de montrer l'existence et l'unicité de $p_C(0)$ pour tout convexe fermé, et le cas général suit par translation.

Soit $y_0 \in C$ et $\lambda = ||y_0||$. Sans perdre de généralité, on peut chercher un minimum sur $A = C \cap \bar{B}(0, \lambda)$, qui est aussi un convexe fermé, et maintenant borné. En particulier, A est faiblement compact. Comme de plus la norme est faiblement semi-continue inférieurement, il existe un point y en lequel la norme atteint son minimum sur A.

Montrons maintenant l'unicité. Supposons qu'il existe y et z deux points distincts de norme minimale sur A. Alors par convexité

$$\min_A ||\cdot|| \leqslant ||ty + (1-t)z)|| \leqslant t||y|| + (1-t)||z|| \leqslant \min_A ||\cdot||.$$

Donc la norme atteint aussi son minimum sur A en les $ty + (1-t)z$ pour $t \in [0, 1]$. Mais apr uniforme convexité, si $||y - z|| > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left|\left|\frac{y+z}{2}\right|\right| \leqslant \frac{||y|| + ||z||}{2} - \delta$$

ce qui contredit la minimalité de y et z. Donc le minimum est unique.

□

3.3.2 Complément : super-reflexivité et plongements isométriques

Définition 3.3.5. *Un espace de Banach est dit super-réflexif s'il admet une norme équivalente qui le rend uniformément convexe.*

Cette façon de définir la super-réflexivité n'est pas la "'vraie"' définition. La définition historique est plus compliqée, et son équivalence avec la définition cidessus est dûe à Enflo [3].

Définition 3.3.6 (Distorsion)**.** *Soit (A, d_A) et (B, d_B) deux espaces métriques. La distorsion de A dans B, notée $c_B(A)$, est l'inf de tous les $K > 0$ tels que il existe $s > 0$ et $\varphi : A \longrightarrow B$ tels que*

$$sd_A(x, y) \leqslant d_B(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant sKd_A(x, y).$$

Cette distorsion est une mesure de à quel point il faut déformer A pour l'envoyer dans B. Lorsque A se plonge isométriquement dans B, sa distorsion vaut 1. Lorsque B est un espace vectoriel normé, s ne joue aucun rôle car on peut remplacer φ par $s^{-1}\varphi$. On dit que A se plonge dans B si $c_B(A)$ est finie.

On considère un arbre binaire enraciné de hauteur n, et on le munit de sa distance de graphe. Soit T_n l'espace métrique discret ainsi défini.

Théorème 3.3.7 (Bourgain)**.** *Un espace de Banach est non-super-réflexif ssi on peut y plonger avec une distorsion uniformément bornée tous les espaces T_n.*

Ce théorème reste vrai si on remplace les plongements uniformément lipschitz d'arbres binaires de tailles finies par le plongement lipschitz d'un arbre binaire infini.

Nous allons montrer une version partielle de ce résultat : on ne peut pas plonger de manière uniformément lipschitz tous les espaces T_n dans un espace p-uniformément convexe.

Définition 3.3.8. *Soit $p \in (0,2]$. Un espace de Banach est p-uniform'ement convexe si il existe $c > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\inf\left\{1 - \frac{||x+y||}{2};\ ||x|| = ||y|| = 1,\ ||x-y|| \geqslant \varepsilon\right\} \geqslant c\varepsilon^p.$$

En particulier, on verra que les espaces L^q sont p-uniformément convexe avec $p = \max(2,q)$. Les espaces de Hilbert sont 2-uniformément convexes comme conséquence de l'identité du parallélogramme.

Un théorème de Pisier [7] dit que si un espace de Banach est uniformément convexe, il existe $p \in (0,2]$ et une norme équivalente qui soit p-uniformément convexe.

Théorème 3.3.9 (Bourgain). *Si X est p-uniformément convexe, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$c_X(T_n) \geqslant C(\log n)^{1/p}$$

pour n assez grand.

Une conséquence purement géométrique est :

Corollaire 3.3.10. *On ne peut pas plonger isométriquement l'arbre binaire infini dans un espace de Hilbert.*

La preuve qu'on fera ci-dessous est dûe à Kloeckner [5].

Le raisonnement va être itératif : on va montrer que la distorsion du plongement d'un arbre de hauteur $n/2$ peut être nettement meilleure que celle du plongement d'un arbre de hauteur n, et conclure car la distorsion d'un petit arbre est minorée par 1.

On utilisera le lemme suivant :

Lemme 3.3.11. *Supposons que E est p-uniformément convexe. Soit $A = \{a_0, a_1, a_2, a_2'\}$ un arbre avec une racine, un noeud interne et deux feuilles. Si $\varphi : A \longrightarrow E$ vérifie*

$$d(e,f) \leqslant ||\varphi(e) - \varphi(f)|| \leqslant Ld(e,f) \quad \forall e,f \in A$$

alors soit

$$||\varphi(a_0) - \varphi(a_2)|| \leqslant 2\left(L - \frac{K}{L^{p-1}}\right),$$

soit

$$||\varphi(a_0) - \varphi(a_2)|| \leqslant 2\left(L - \frac{K}{L^{p-1}}\right)$$

où la constante K ne dépend que de l'espace E.

Preuve du Théorème 3.3.9. Soit $L = L_n > 0$ tel qu'il existe $\varphi : T_n \longrightarrow X$ avec

$$d(e,e') \leqslant d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant Ld(e,e').$$

On va construire un plongement de l'arbre de hauteur $n/2$. Pour tout noeud interne, on nomme arbitrairement un des enfants le fils, et l'autre la fille. On sélectionne ensuite deux petits-enfants de la racne, en identifiant le petit-enfant le plus proche de la racine via le fils, et le petit-enfant le plus proche de la racine via la fille (en cas d'égalité, on choisit arbitrairement). On répète ensuite cette opération avec les deux petits-enfants choisi, jusqu'à la génération $n-2$. Ceci nous sélectionne un arbre de hauteur $\lfloor n/2 \rfloor$, et leurs images en donne un plongement. De plus, comme on a systématiquement choisi le petit-enfant le plus proche parmis les deux choix possible,s d'après le lemme si f est un enfant de e dans le nouvel arbre, on a

$$2d(e,f) \leqslant d(\varphi(e),\varphi(f)) \leqslant 2\left(L - \frac{K}{L^{p-1}}\right).$$

Donc la distorsion de $T_{\lfloor n/2 \rfloor}$ est majorée par $\left(L - \frac{K}{L^{p-1}}\right)$. En otérant $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ fois cette construction, on a un plongement de T_1 dont la distorsion est d'au plus

$$L - \lfloor \log_2(n) \rfloor \frac{K}{L^{p-1}}.$$

Mais comme la distorsion est toujours plus grande que 1, on obtient $L^p \geqslant c(p,K)\log_2(n)$ pour n assez grand.

$\square$

Preuve du Lemme 3.3.11. Sans perdre de généralité, on peut supposer $\varphi(a_0) = 0$. On notera x_1 (resp. x_2, x_2') pour $\varphi(a_1)$ (resp. $\varphi(a_2)$, $\varphi(a_2')$). Supposons que $||x_2|| \geqslant 2(L-\eta)$, où $\eta > 0$ sera choisi plus tard. Par inégalité triangulaire, comme $||x_1||$ et $||x_2 - x_1||$ sont majorés par L, elles sont toutes les deux minorées par $L - 2\eta$. Soit

$$v := \frac{||x_1||}{||x_2 - x_1||}(x_2 - x_1),$$

alors

$$||x_1 + v - x_2|| = \left|\left|(x_1 - x_2)\left(1 - \frac{||x_1||}{||x_2 - x_1||}\right)\right|\right| = \big|||x_1|| - ||x_2 - x_1||\big| \leqslant 2\eta$$

et

$$||x_1 + v|| \geqslant ||x_2|| - ||x_1 + v - x_2|| \geqslant 2L - 4\eta.$$

Les vecteurs $x_1/||x_1||$ et $v/||x_1||$ sont de normes 1, et leur moyenne a une norme minorée par $1 - 2\eta/D$. Par hypothèse de p-uniforme convexité, on a alors

$$||x_1 - v|| \leqslant ||x_1|| \left(1 - \left(\frac{2\eta}{cL}\right)^{1/p}\right) \leqslant \varepsilon L$$

où $\varepsilon = (2\eta/(cL))^{1/p}$. En conséquence,

$$||2x_1 - x_2|| \leqslant ||x_1 + v - x_2|| + ||x_1 - v|| \leqslant 2\eta + \varepsilon D.$$

Si on fait la même hypothèse que $||x_2'|| \geqslant 2(L-\eta)$, on a alors aussi $||x_2' - 2x_1|| \leqslant 2\eta + \varepsilon D$, et donc

$$||x_2 - x_2'|| \leqslant 4\eta + 2D\left(\frac{2\eta}{cL}\right)^{1/p}.$$

En prenant $\eta = K/D^{p-1}$ avec K suffisamment petit pour que la borne ci-dessus soit strictement inférieure à 2, on aboutit à une contradiction avec $||x_2 - x_2'|| \geqslant 2$, ce qui conclut la preuve. $\square$

Pour finir, mentionnons un plongement explicite de l'arbre binaire infini T_∞ dans ℓ^1. Comme T_∞ est dénombrable, on peut considérer une bijection ψ entre ses sommets et $\mathbb{N}$, et on peut identifier un élément k de $\mathbb{N}$ avec la suite dont seul le k-ième élément est non-nul, et vaut 1. On considère alors $\varphi(e) = \sum_{f \leqslant e} \psi(f)$, où l'ordre est celui de l'arbre (i.e. $f \leqslant e$ si f est un ancêtre de e). On vérifie aisément que

$$||\varphi(e) - \varphi(e')||_1 = d(e, e')$$

et donc on a bien un plongement isométrique.

Un exmeple d'espace réflexif mais pas super-réflexif est $\left(\bigotimes_{1 \leqslant n < \infty} \ell_1^n\right)$ muni de la norme $||(x_n)_n|| = \sqrt{\sum ||x_n||_{\ell_1^n}^2}$, restreint au sous-espace vectoriel pour lequel cette norme est finie.

3.4 Le cas des espaces L^p

Dans cette section, $(\mathcal{X}, \mu)$ sera un espace abstrait muni d'une mesure positive. L'espace L^p est l'ensemble des fonctions mesurables, dont la puissance p-ième est intégrable, et quotienté par la relation d'équivalence "'être égales μ-presque partout"'. On le munit de la norme la norme $||f||_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$.

Pour $p = \infty$, $||f||_\infty := \inf\{C > 0;\ \ \mu(|f| > C) = 0\}$.

Dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, on utilisera le résultat suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue, et $p \in [1, +\infty)$. L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Proof. Soit E l'ensemble des combinaisons l'inéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'indicatrices de pavés $\prod]x_i, y_i[$ avec les x_i et y_i rationnels. Par construction, E est dénombrable, et on va montrer qu'il est dense. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. Par densité des fonctions continues à support compact, il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $||f - g||_p < \varepsilon$. En consdiérant ω un ouvert borné contenant le support de g, et en utilisant l'uniforme continuité de g, on peut construire $h \in E$ telle que $||g - h||_\infty \leqslant \varepsilon/(|\omega|^{1/p})$ et $\text{supp}(h) \subset \omega$. On en déduit que $||f - h||_p \leqslant 2\varepsilon$, ce qui conclut la preuve. □

En revanche, $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable : les indicatrices de boules ouvertes centrées en les points $x \in \Omega$ (avec un rayon choisi pour que ces boules soient incluses dans Ω) forment une famille indénombrable dont les éléments sont toujours à distance 1, ce qui ne peut pas se produire dans un espace métrique séparable.

3.4.1 Dualité pour les espaces L^p

Théorème 3.4.2. *Les espaces $L^p(\mathcal{X}, \mu)$ sont réflexifs pour $1 < p < \infty$, et leur dual est isométrique à $L^{p'}(\mathcal{X}, \mu)$ via l'application*

$$f \in L^{p'}(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \left(g \in L^p(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \int fg d\mu\right).$$

On a immédiatement comme corollaire :

Théorème 3.4.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si $1 < p < \infty$, toute suite bornée de $L^p(\Omega)$ admet une sous-suite qui converge faiblement.*

La réflexivité est une conséquence des lemmes suivants

Lemme 3.4.4 (Inégalité de Clarkson). *Soit $2 \leqslant p < \infty$. Pour tout $f, g \in L^p$ on a*

$$\left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right|_p^p + \left|\left|\frac{f-g}{2}\right|\right|_p^p \leqslant \frac{1}{2}(||f||_p^p + ||g||_p^p).$$

Pour $p = 2$, c'est en fait une égalité, qui correpsond à l'identité du parallélogramme.

La réflexivité de L^p pour $p \geqslant 2$ suit immédiatement :

Corollaire 3.4.5. *L'espace L^p est p-uniformément convexe lorsque $2 \leqslant p < \infty$.*

Proof. Si $||f||_p$ et $||g||_p$ sont majorés par 1 et $||f - g||_p \geqslant \varepsilon$, alors en appliquant l'inégalité de Clarkson on a

$$1 - \left|\left|\frac{f+g}{2}\right|\right| \geqslant 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p} \geqslant c(p)\varepsilon^p.$$

□

Preuve de l'inégalité de Clarkson. Comme $t \longrightarrow (t^2+1)^{p/2} - t^p - 1$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$t^p + 1 \leqslant (t^2+1)^{p/2} \quad \forall t \geqslant 0.$$

En remplaçant t par t/s et en multipliant par s^p, on a alors

$$t^p + s^p \leqslant (t^2+s^2)^{p/2} \quad \forall s, t \geqslant 0.$$

En remplaçant t par $|f+g|/2$ et s par $|f-g|/2$, puis en utilisant la convexité de $t \longrightarrow t^{p/2}$ lorsque $t \geqslant 2$, on obtient

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \leqslant \left(\frac{f^2}{2} + \frac{g^2}{2}\right)^{p/2} \leqslant \frac{f^p}{2} + \frac{g^p}{2}.$$

et il suffit d'intégrer contre μ pour conclure. □

Le cas $1 < p < 2$ est plus difficile, et vient comme conséquence de l'inégalité suivante :

Lemme 3.4.6 (Inégalité de Hanner). *Soit $1 < p \leqslant 2$. Pour tout $f, g \in L^p$ on a*

$$\big(||f||_p + ||g||_p\big)^p + \big|||f||_p - ||g||_p\big|^p \leqslant ||f+g||_p^p + ||f-g||_p^p.$$

Proof. Pour $r \in [0,1]$, soit

$$\alpha(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1} \text{ et } \beta(r) = \frac{(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}}{r^{p-1}}.$$

Nous allons commencer par montrer que pour tout $s, t \in R$ et $r \in [0,1]$ on a

$$\alpha(r)|s|^p + \beta(r)|t|^p \leqslant |s+t|^p + |s-t|^p. \tag{3.1}$$

Pour démontrer cette inégalité, on peut supposer sans perdre de généralité que $s,t>0$. De plus, comme $\alpha-\beta$ est décroissante et que $\alpha(1)=\beta(1)$, on a $\alpha\geqslant\beta$ sur $[0,1]$, et donc il suffit de dḿeontrer l'inégalité pour $s>t$. En divisant par s^p, on voit qu'il suffit de montrer que pour tout $R\in[0,1]$, la fonction $f(r):=\alpha(r)+R^p\beta(r)$ atteint son maximum en $r=R$. En calculant f', on voit qu'elle ne s'annulle que pour $r=R$. De plus, $f'(1)\leqslant 0$ et $f'(0^+)>0$, donc le maximum est en $r=R$.

Déontrons maintenant l'inégalité de Hanner. Soit $f,g\in L^p$. Sans perdre de généralité on peut supposer $r=||g||_p/||f||_p\leqslant 1$. D'après (3.1) on a

$$\alpha(r)|f|^p+\beta(r)|g|^p\leqslant|f+g|^p+|f-g|^p.$$

En intégrant et en utilisant les expressions explicites de α et β, on a

$$(||f||_p+||g||_p)^{p-1}||f||_p+(||f||_p-||g||_p)^{p-1}||f||_p+||g||_p(||f||_p+||g||_p)^{p-1}-||g||_p(||f||_p-||g||_p)^{p-1}$$
$$\leqslant||f+g||_p^p+||f-g||_p^p,$$

et on simplifie pour conclure.

□

Corollaire 3.4.7. *Soit* $1<p<2$. *On a pour tout* $f,g\in L^p$

$$||f+g||_p^2+(p-1)||f-g||_p^2\leqslant 2(||f||_p^2+||g||_p^2).$$

En particulier, les espaces L^p *sont* 2*-uniformément convexes lorsque* $1<p\leqslant 2$.

Proof. On va utiliser l'inégalité suivante (appelée inégalité à deux points de Beckner): si $1<p<2$ on a

$$|s^2+(p-1)t^2|^{1/2}\leqslant\left(\frac{|s+t|^p+|s-t|^p}{2}\right)^{1/p}.$$

Une fois cette inégalité démontrée, on a

$$\begin{aligned}||f+g||_p^2+(p-1)||f-g||_p^2&\leqslant\left(\frac{|||f+g||_p+||f-g||_p|^p+|||f+g||_p-||f-g||_p|^p}{2}\right)^{2/p}\\&\leqslant\left(\frac{||f||_p^p+||g||_p^p}{2}\right)^{2/p}\\&\leqslant\frac{||f||_p^2+||g||_p^2}{2}\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Hanner (en échangeant les rôles de f et g avec $(f+g)/2$ et $(f-g)/2$, puis utilisé la convexité de $t\longrightarrow t^{2/p}$ lorsque $p\leqslant 2$. □

On peut déjà citer un autre corollaire de l'uniforme convexité, conséquence du Théorème 3.3.3 :

Corollaire 3.4.8. *Soit* $1<p<\infty$. *Une suite* (f_n) *converge fortement vers* f *dans* L^p *ssi elle converge faiblement, et si* $||f_n||_p\longrightarrow||f||_p$.

Passons maintenant à la preuve du théorème de Riesz:

Preuve du Théorème 3.4.2. On a déjà démontré la reflexivité, comme conséquence de l'uniforme convexité et du théorème de Milman-Pettis. De plus, d'après l'inégalité de Holder, pour tout $g \in L^q$, la forme linéaire

$$T(g) : f \longrightarrow \int fgd\mu$$

est bien continue sur L^p, et $||T(g)||_{op} \leqslant ||g||_q$. De plus, en considérant $f = g|g|^{q-2}$, on a

$$T(g)(f) = ||g||_q^q; \quad ||f||_p = \left(\int |g|^{p(q-1)} d\mu \right)^{1/p} = ||g||_q^{q/p} = ||g||_q^{q-1},$$

donc $||T(g)||_{op} = ||g||_q$, et T est une isométrie. Il nous reste à montrer que T est surjective.

Pour cela, on va montrer que $T(L^q)$ est dense dans $(L^p)^*$. Comme $T(L^q)$ est fermé (car T est une isométrie), si ce n'était pas le cas, il existerait une forme linéaire sur $(L^p)^*$ non-nulle, mais nulle sur $T(L^q)$. Soit $h \in (L^p)^{**}$ une formelinéaire nulle sur $T(L^q)$. Comme L^p est réflexif, il existe alors $f \in L^p$ telle que $h(u) = u(f)$ pour tout $u \in (L^p)^*$. En particulier, on aurait

$$\int fgd\mu = 0 \quad \forall g \in L^q.$$

En prenant alors $g = |f|^{p-2}f \in L^q$, on obtient $||f||_p = 0$, et donc h est la forme linéaire nulle. Donc $T(L^q)$ est dense dans $(L^p)^*$, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 3.4.9. *Si $(\mathcal{X}, \mu)$ est σ-fini, alors l'application*

$$f \in L^\infty(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \left(g \in L^1(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \int fgd\mu \right)$$

est une isométrie entre $(L^1)^*$ et L^∞.

En revanche, L^1 et L^∞ ne sont pas réflexifs en général.

Remarque 3.4.1. *La description du dual de L^∞ ne semble pas admettre de réponse générale, car elle dépend du système d'axiome, même dans des cas concrets. Si on utilise l'axiome du choix, il existe des formes linéaires continues sur L^∞ qui ne sont pas décrites par des mesures, donc a fortiori par des éléments de L^1. Mais sans l'axiome du choix, déterminer si $(L^\infty(\mathbb{R}^n))^*$ est strictement plus grand que $L^1(\mathbb{R}^n)$ est un problème indécidable. TROUVER REF.*

Comme corollaire (et en utilisant le théorème TO REF), on a

Théorème 3.4.10. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. De toute suite bornée de $L^\infty(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite qui converge pour la topologie faible-*.*

Pour démontrer ce théorème de représentation des formes linéaires sur L^1, on s'appuiera sur le théorème de Radon-Nikodym, vu dans le cours d'intégration au premier semestre :

Théorème 3.4.11. *Soit μ une mesure positive σ-finie sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, et soit ν une mesure signée σ-finie sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$. Il existe un unique couple de mesures positives σ-finies telles que $\nu = \nu_1 + \nu_2$, ν_1 soit absolument continue par rapport à μ, et ν_2 soit étrangère à μ.*

De plus, il existe une unique fonction mesurable $f \in L^1(\mu)$ telle que $\nu_1 = f\mu$.

Preuve du Théorème 3.4.9. Tout d'abord, montrons que l'application

$$T : f \in L^\infty(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \left(g \in L^1(\mathcal{X}, \mu) \longrightarrow \int fgd\mu \right)$$

est une isométrie. L'inégalité $||T(f)||_{op} \leqslant ||f||_\infty$ est immédiate. Inversement, quitte à remplacer f par $-f$on peut supposer $\mu(f \geqslant ||f||_\infty - \varepsilon) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Soit A un sous-ensemble de $\{f \geqslant ||f||_\infty - \varepsilon\}$ tel que $\mu(A) < \infty$ et $g = \nVdash_A$. On a $T(f)(g) \geqslant (||f||_\infty - \varepsilon)\mu(A) = (||f||_\infty - \varepsilon)||g||_1$, donc $||T(f)||_{op} \geqslant ||f||_\infty - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc on a bien que T est une isométrie de L^∞ vers son image.

Il nous reste maintenant à montrer la surjectivité vers $(L^1)^*$. Commençons par le cas où μ est finie. Nous allons d'abord montrer que une forme linéaire continue sur L^1 peut être représentée par une mesure, puis utiliser le théorème de Radon-Nikodym pour la représenter par une fonction L^∞.

Soit $h \in (L^1)^*$. Posons $\nu(A) = h(\nVdash_A)$, et montrons que ν est une mesure signée. Tout d'abord, $\nu(\varnothing) = h(\mathbb{1}_\varnothing) = h(0) = 0$. De plus, $|\nu(A)| = |h(\mathbb{1}_A)| < \infty$ pour tout ensemble mesurable A, donc ν est une mesure finie. Ensuite, si les A_i sont deux à deux disjoints, on a

$$\nu\left(\cup_{i=1}^n A_i\right) = h\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^n h(\mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i).$$

Comme $\sum_1^n \mathbb{1}_{A_i}$ converge dans $L^1(\mu)$ vers $\sum_1^\infty \mathbb{1}_{A_i}$ et que h est continue, on peut passer à la limite et obtenir

$$\nu\left(\cup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i).$$

Donc ν est bien une mesure signée.

Ensuite, comme si $\mu(A) = 0$, $\nVdash_A = 0$ dans $L^1(\mu)$, et donc $\nu(A) = 0$. Donc ν est absolument continue par rapport à μ, et par application du théorème de Radon-Nikodym il existe une fonction mesurable $f \in L^1(\mu)$ telle que $\nu = f\mu$. De plus, par linéarité et approximation avec des fonctions simples (qui sont denses dans L^1), pour tout $g \in L^1(\mu)$ on a $h(g) = \int gfd\mu$.

Il nous reste à montrer que $f \in L^\infty$. Supposons que $f \notin L^\infty$. Quitte à remplacer f par $-f$ (ce qui revient à remplacer h par $-h$), pour tout $R > 0$ on a $\mu(\{f \geqslant R\}) > 0$. En prenant $g_R = \mathbb{1}_{\{f \geqslant R\}}$, on a

$$|h(g_R)| \geqslant R\mu(\{f \geqslant R\}) = R||g_R||_{L^1(\mu)}.$$

Donc $||h||_{op} \geqslant R$ pour tout $R > 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $h \in (L^1)^*$. Donc $f \in L^\infty$, et de plus $||f||_\infty \leqslant ||h||_{op}$.

Passons maintenant au cas où μ est seulement σ-finie. Il existe des ensemble smesurables B_i deux à deux disjoints tels que $\mu(B_i) < \infty$ et $\cup B_i = \mathcal{X}$. Si on applique le cas des mesures finies aux espaces $(B_i, \mathcal{A}_i)$ avec $\mathcal{A}_i = \{A \cap B_i;\ \ A \in \mathcal{A}\}$ on a l'existence de fonctions mesurables f_i telles que pour tout i f_i est supportée sur B_i avec $||f_i||_{L^\infty(\mu)} \leqslant ||h||_{op}$, et telles que si g_i est supportée sur B_i alors $h(g) = \int f_i g d\mu$. On pose alors $f = \sum_i f_i$, qui est toujours L^∞ car les B_i sont deux à deux disjoints, et par linéarité

$$h\left(\sum_{i \leqslant n} g\mathbb{1}_{B_i}\right) = \int fg\mathbb{1}_{\cup_{i \leqslant N} B_i} d\mu.$$

On peut ensuite faire tendre N vers l'infini, en utilisant la convergence de $g\mathbb{1}_{\cup_{i\leqslant N}B_i}$ dans L^1, pour obtenir

$$h(g) = \int fgd\mu.$$

$\square$

On termine cette section par un théorème d'interpolation, qui sera utilisé plus tard pour étudier la transformée de Fourier.

Théorème 3.4.12 (Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin). *Soit $p_0, p_1, r_0, r_1 \in [1, +\infty]$ et $t \in [0, 1]$.Soit μ et ν deux mesures σ-finies sur deux espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ (qui peuvent être différents). On pose*

$$\frac{1}{p_t} := \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}; \quad \frac{1}{r_t} := \frac{1-t}{r_0} + \frac{t}{r_1}.$$

Soit T un opérateur linéaire de $L^{p_0}(\mu, \mathbb{C}) + L^{p_1}(\mu, \mathbb{C})$ vers $L^{r_0}(\nu, \mathbb{C}) + L^{r_1}(\nu, \mathbb{C})$ (i.e. sur les foncitons à valeurs complexes), continu de L^{p_0} vers L^{r_0} avec norme M_0, et continu de L^{p_1} vers L^{r_1} avec norme M_1. Alors T est un opérateur continu de $L^{p_t}(\mu)$ vers $L^{r_t}(\nu)$, de norme inférieure à $M_0^{1-t}M_1^t$.

En d'autres termes, la fonction qui à $(s, t) \in [0, 1]^2$ associe la norme d'un opérateur donné de $L^{1/s}$ vers $L^{1/t}$ est log-convexe. Si on travaille avec un opérateur sur les fonctions à valeurs réelles, on peut trivialement l'étendre à un opérateur sur les fonctions à valeurs complexes, mais la comparaison des normes opérateur fait apparaître un facteur 2 en plus.

Corollaire 3.4.13 (Inégalité de Young pour la convolution). *Soient p, r, s tels que $p^{-1} + r^{-1} = 1 + s^{-1}$, et soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ (par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors leur convolution vérifie*

$$||f * g||_{L^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant ||f||_{L^p(\mathbb{R}^d)}||g||_{L^r(\mathbb{R}^d)}.$$

Antrement dit, l'opérateur de convolution avec une fonction L^p est continue de L^r vers L^s.

Proof. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Il est immédiat que l'opérateur

$$T : g \longrightarrow f * g := \int f(y)g(\cdot - y)dy$$

vérifie

$$||Tg||_1 \leqslant ||f||_1||g||_1; \quad ||Tg||_\infty \leqslant ||f||_1||g||_\infty.$$

Donc T est continu de L^1 dans L^1 et L^∞ dans L^∞, à chaque fois avec norme $||f||_1$. Par application du théorème de Riesz-Thorin, on a alors

$$||Tg||_p \leqslant ||f||_1||g||_p.$$

Mais en échangeant les rôles de f et g, on voit alors que si $f \in L^p$, T est continue de L^1 dans L^p, avec norme $||f||_p$. De plus, toujours si $f \in L^p$, une application de l'inégalité de Holder montre que T est continue de L^q dans L^∞, avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$, avec norme $||f||_p$. Une nouvelle application du théorème de Riesz-Thorin donne alors que T est continu de L^r dans L^s (avec les valeurs données dans l'énoncé), avec norme $||f||_p$, ce qui conclut la preuve. $\square$

La preuve du théorème de Riesz-Thorin utilisera le résultat suivant :

Théorème 3.4.14 (Théorème des trois droites de Hadamard)**.** *Soit φ une fonction à valeurs complexes, analytique et bornéesur la bande $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leqslant \Re(z) \leqslant 1\}$, et soit*

$$N(a) := \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(a+it)|.$$

Alors

$$N(a) \leqslant N(0)^(1-a)N(1)^a.$$

Proof. Soit $c = \log(N(0)/N(1))$ et $\psi(z) = e^{cz}\varphi(z)$. Cette fonction est analytique bornée sur la bande, et son module est majoré par $N(0)$ sur les deux droites $\Re(z) = 0$ et $\Re(z) = 1$. Donc par le principe du maximum, son module est majoré par $N(0)$ sur toute la bande. D'où

$$|\varphi(a+it)| \leqslant N(0)e^{-ca} = N(0)^{1-a}N(1)^a,$$

ce qui conclut la preuve. □

Preuve du théorème de Riesz-Thorin. □

3.4.2 Compléments sur la compacité dans les espaces L^p

Pour le début de cette section, on ne considèrera que les espaces $L^p(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue.

Notation. *Si Ω est un ouvert, on notera $A \subset\subset \Omega$ pour dire que A est un ouvert tel que $\bar{A}$ est inclus dans Ω.*

Notation. *On notera τ_h l'opérateur linéaire qui a une fonction f associe la fonction $x \longrightarrow f(x+h)$.*

Théorème 3.4.15 (Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov)**.** *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $\mathcal{F}$ une partie bornée de $L^p(\Omega)$. Si*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $A \subset\subset \Omega$ il existe $0 < \delta < d(A, \mathbb{R}^d\backslash\Omega)$ tel que*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} ||\tau_h f - f||_{L^p(A)} \leqslant \varepsilon \quad \forall h \text{ t.q. } |h| \leqslant \delta;$$

2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \subset\subset \Omega$ tel que*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f||_{L^p(\Omega\backslash A)} \leqslant \varepsilon;$$

alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $L^p(\Omega)$ (pour la topologie forte).

Proof. Comme $L^p(\Omega)$ est complet, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est précompact. Soit $\varepsilon > 0$. Le but est de montrer qu'on peut recouvrir $\mathcal{F}$ avec un nombre fini de boules de rayon ε de $L^p(\Omega)$.

Soit $A \subset\subset \Omega$ tel que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} ||f||_{L^p(\Omega\backslash A)} = \sup_{f\in\mathcal{F}} ||f - \mathbb{1}_A f||_{L^p(\Omega)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha < d(A, \mathbb{R}^d \backslash \Omega)$ et

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} ||\tau_h f - f||_{L^p(A)} \leqslant \varepsilon/3 \ \ \forall h \text{ t.q. } |h| \leqslant \alpha.$$

Soit ρ_α une fonction C^∞, positive, à support inclus dans la boule de rayon α et telle que $\int \rho dx = 1$. Soit

$$\mathcal{F}_{\alpha,A} := \{\rho_\alpha * f|_A; \ \ f \in \mathcal{F}\}$$

l'ensemble des convolutions d'éléments de $\mathcal{F}$ avec ρ_α. On a

$$|\rho_\alpha * f(x) - f(x)| \leqslant \int_{\{|h|\leqslant\alpha\}} \rho_\alpha(h)|\tau_{-h}f(x) - f(x)|dh.$$

En appliquan l'inégalité de Jensen,

$$|\rho_\alpha * f(x) - f(x)|^p \leqslant \int_{\{|h|\leqslant\alpha\}} \rho_\alpha(h)|\tau_{-h}f(x) - f(x)|^p dh,$$

et donc

$$||\rho_\alpha f - f||^p_{L^p(A)} \leqslant \int_{\{|h|\leqslant\alpha\}} \rho_\alpha(h)||\tau_{-h}f - f||^p_{L^p(A)} dh \leqslant (\varepsilon/3)^p,$$

et donc

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} ||\rho_\alpha * f - f||_{L^p(A)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par inégalité de Holder

$$||\rho_\alpha * f||_{L^\infty(A)} \leqslant ||\rho_\alpha||_{L^q(A)}||f||_{L^p(A)}; \quad ||\nabla(\rho_\alpha * f)||_{L^\infty(A)} \leqslant ||\nabla\rho_\alpha||_{L^q(A)}||f||_{L^p(A)},$$

où $p^{-1} + q^{-1} = 1$. En particulier, $\mathcal{F}_{n,A}$ est uniformément bornée et uniformément équilipschitzienne, donc apr théorème d'Arzela-Ascoli elle est relativement compacte dans $C_c(A)$, et donc dans $L^p(A)$. Il existe donc une famille finie $g_1 \cdot g_N$ d'éléments de $L^p(A)$ (qu'on prolonge par 0 en dehors de A) tels que

$$\mathcal{F}_{n,A} \subset \cup_{1\leqslant i\leqslant N} B_{L^p(\Omega)}(g_i, \varepsilon/3).$$

Mais comme

$$||f - \mathbb{1}_A\rho_\alpha * f||_{L^p(\Omega)} \leqslant ||f||_{L^p(\Omega\backslash A)} + ||f - \rho_\alpha * f||_{L^p(A)} \leqslant \frac{2\varepsilon}{3},$$

on en déduit que

$$\mathcal{F} \subset \cup_{1\leqslant i\leqslant N} B_{L^p(\Omega)}(g_i, \varepsilon),$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Un autre point de vue, dont on discutera plus rigoureusmeent plus tard, est détudier les obstructions à la convergence forte lorsqu'on a convergence faible. Si on regarde le cas L^2, il s'avère qu'il y a essentiellement quatre obstructions possibles :

-les translations : si f est une fonction L^2, $\tau_h f$ converge faiblement vers la fonction nulle lorsque h tend evrs l'infini, mais la norme L^2 reste constante.

-l'évanescence : $x \longrightarrow \lambda^{-d/2} f(x/\lambda)$ a une norme L^2 constante, mais s'étale à l'infini et converge faiblement vers 0 si $\lambda \longrightarrow \infty$.

-la concentration : on reprend le même exemple que précdemment, mais on fait tendre λ vers 0^+. La masse reste constante, mais se concentre dans une région de plus en plus petite. Il faudrait renormaliser par λ^{-d} plutôt que $\lambda^{-d/2}$ pour avoir convergence vers une masse de Dirac (quand f est continue à support compact), donc avec cette normalisation on a convergence faible vers 0.

-les oscillations : $x \longrightarrow e^{iy\cdot x} f(x)$ converge faiblement vers 0 (lemme de Riemann-Lebesgue), mais pas dans L^2 (et on peut prendre les parties réelles et imaginaires pour avoir des fonctions à valeurs réelles).

On peut utiliser ces exemples pour montrer que les hypothèses du théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov sont aussi nécessaires.

Bien sûr on peut avoir des combinaisons de ces différentes situations. La philosophie générale pur ce type de résultats (y compris dans d'autres espaces de fonctions) est appelée concentration-compacité. Elle apparaît sous différente forme, et on pourra consulter TO REF. On verra plus tard des énoncés rigoureux de ce type.

A noter que chacun de ces cas peut être vu comme résultant d'une action d'un groupe non compact sur L^2 qui préserve la norme.

Pour le cas L^1, l'espace n'est pas réflexif, mais on a un critère de compacité faible. On se place maintenant de nouveau dans le cadre d'un espace mesuré abstrait muni d'une mesure positive *finie*.

Définition 3.4.16 (Uniforme intégrabilité)**.** *Une famille $\mathcal{F}$ bornée dans $L^1(\Omega)$ est dite uniformément intégrable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall A \subset \Omega \textit{ mesurable, } |A| \leqslant \delta \Rightarrow \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_A |f| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 3.4.17 (Théorème de Dunford-Pettis)**.** *Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ un espace abstrait muni d'une tribu et d'une mesure positive finie. Une famille bornée dans $L^1(\mu)$ est uniformément intégrable si et seulement si elle est faiblement séquentiellement relativement compacte dans $L^1(\Omega)$.*

L'uniforme intégrabilité (pour des fammilles de variables aléatoires) est une notion très utilisée en probabilités, pour prouver des convergences L^1 de variables aléatoires. Il en sera notamment question dans le cours de processus stochastiques de deuxième année. Nous n'allons dḿeonter ici que le sens direct. A FAIRE : REF SENS RECIPROQUE

On notera dorénavent UI pour uniformément intégrable.

Proof. Soit $\mathcal{F}$ une partie bornée et uniformément intégrable de $L^1(\mu)$. On vérifie tout d'abord que si une famille est UI, alors leurs parties positives et négatives le sont aussi. Donc on peut sans perdre de généralité considérer le cas où les éléments de $\mathcal{F}$ sont positifs.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un suite de $\mathcal{F}$. Posons $f_n^k := f_n \mathbb{1}_{\{f_n \leqslant k\}}$ et $M := \sup_n \int f_n$. On a

$$M \geqslant \sup_n \int_{\{f_n > k\}} f_n \geqslant \sup_n k |\{f_n > k\}|$$

donc $\sup_n |\{f_n > k\}| \longrightarrow 0$ lorsque $k \longrightarrow \infty$. En conséquence, comme la suite est UI, on a

$$\lim_k \sup_n \int_{\{f_n > k\}} f_n = 0.$$

Posons $\delta_k = \sup_n \int_{\{f_n > k\}} = \sup_n ||f_n - f_n^k||_1$ (qui tend donc vers 0).

Comme $(f_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞, on peut extraire une sous-suite qui converge pour la topologie faible-*. Mais comme μ est finie, $L^\infty(\mu) \subset L^1(\mu)$, et cette sous-suite converge aussi faiblement dans L^1 (via l'identification de $(L^1)^*$ et L^∞).

Pour tout k, on a donc une extraction φ_k telle que $f^k_{\varphi_k(n)}$ converge faiblement dans L^1 vers une fonction f^k, et par extraction successive on peut imposer que $f^\ell_{\varphi_k(n)}$ converge vers f^ℓ pour tout $\ell \leqslant k$.

Comme $f^\ell_{\varphi_k(n)} \leqslant f^{\ell+1}_{\varphi_k(n)}$ si $\ell \leqslant k-1$, on voit que f^k est croissante. De plus

$$\sup_k \int f^k \leqslant \sup_k \liminf \int f^k_{\varphi_k(n)} \leqslant \sup_n \int f_n.$$

Par le théorème de convergence monotone de Beppo-Lévy, f^k converge p.p. et dans L^1 vers $f = \sup_k f^k$.

Nous allons montrer que, pour $\varphi(n) = \varphi_n(n)$ (extraction diagonale), on a la convergence faible dans L^1 de $f_{\varphi(n)}$ vers f. Soit $g \in L^\infty$ et $\varepsilon > 0$. Il existe k_0 suffisamment grand pour que

$$||g||_\infty(\delta_{k_0} + ||f^{k_0} - f||_{L^1}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left|\int g(f_{\varphi(n)} - f)\right| &\leqslant \left|\int g(f_{\varphi(n)} - f^{k_0}_{\varphi(n)} + f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0} + f^{k_0} - f)\right| \\
&\leqslant ||g||_\infty(||f_{\varphi(n)} - f^{k_0}_{\varphi(n)}||_1 + ||f^{k_0} - f||_1) + \left|\int g(f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0})\right| \\
&\leqslant ||g||_\infty(\delta_{k_0} + ||f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0}||_1) + \left|\int g(f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0})\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int g(f^{k_0}_{\varphi(n)} - f^{k_0})\right|.
\end{aligned}$$

Comme $f^{k_0}_{\varphi(n)}$ converge faiblement dans L^1 vers f^{k_0}, le dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc pour n assez grand

$$\left|\int g(f_{\varphi(n)} - f)\right| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve. □

Chapter 4

Espaces de mesures

Dans ce chapitre, on verra des applications de la topologie faible-* à la topologie des epsaces de mesures, via les applications

$$f \longrightarrow \int f d\mu$$

qui, étant donné une mesure borelienne finie μ, donne une forme linéaire sur un espace de fonctions.

Dans ce chapitre (et les autres) on utilisera la convention française : un espace compact est toujours supposé séparé.

4.1 Quelques rappels sur la convergence de mesures

Définition 4.1.1. *Une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures de probabilités sur un espace polonais converge étroitement vers la mesure de probabilité μ si pour toute fonction continue bornée f on a*

$$\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu.$$

La proposition suivante est souvent utile pour limiter la classe de fonctions à utiliser pour vérifier la convergence :

Proposition 4.1.2. *On suppose (E, d) est un espace polonais. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers μ;*
2. *Pour toute fonction f uniformément continue bornée, $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$;*
3. *Pour toute fonction f lispchitz et bornée, on a $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$;*
4. *Pour tout fermé F, on a $\mu(F) \geqslant \limsup \mu_n(F)$;*
5. *Pour tout ouvert O, on a $\mu(O) \leqslant \liminf \mu_n(O)$;*
6. *Pour tout borélien A avec $\mu(\partial A) = 0$, on a $\lim \mu_n(A) = \mu(A)$;*
7. *Pour toute fonction f mesurable, continue μ-presque partout et bornée, on a $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$.*

Proof. Les implications $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ et $7 \Rightarrow 1$, et l'équivalence $4 \Leftrightarrow 5$, sont immédiates.

Pour montrer que $3 \Rightarrow 4$, pour F un ensemble fermé, on introduit la fonction $f_K(x) := \max(0, 1 - Kd(x,F))$. Cette fonction est K-lipchitz et bornée, et lorsque $K \longrightarrow +\infty$, f_K converge de manière monotone vers $\mathbb{1}_F$. On a donc $\mu_n(F) \leqslant \int f_K d\mu_n$ pour tout n, et donc

$$\limsup_n \mu_n(F) \leqslant \lim_K \limsup_n \int f_K d\mu_N = \lim_K \int f_K d\mu = \mu(F)$$

où on a utilisé le théorème de convergence dominé appliquée aux fonctions $f_K \leqslant 1$. On a donc bien $3 \Rightarrow 4$.

Montrons maintenant que 4 et 5 (qui sont équivalentes) impliquent 6. Si $\mu(\partial A) = 0$, on a alors $\mu(A) = \mu(A^\circ) = \mu(\bar{A})$, et donc

$$\begin{aligned} \mu(A) = \mu(A^\circ) \leqslant \liminf \mu_n(A^\circ) \leqslant \liminf \mu_n(A) \leqslant \limsup \mu_n(A) \\ \leqslant \limsup \mu_n(\bar{A}) \leqslant \mu(\bar{A}) = \mu(A), \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Montrons enfin que $6 \Rightarrow 7$. Soit f une fonction mesurable, bornée et continue μ-presque partout. Quitte à décomposer f en $f_+ - f_-$, on peut supposer que f est positive. Grâce au théorème de Fubini, on a

$$\int f d\mu = \int \mu(dx) \int_0^\infty \mathbb{1}_{[O,f(x)]}(y) dy = \int_0^\infty \mu(\{f \geqslant y\} dy.$$

Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. Pour tout y, si $A_y = \{x; f(x) \geqslant y\}$, alors $\partial A_y \subset D \cup \{f = y\}$. En effet, si $x \in \bar{A}_y$, alors il existe une suite telle que $x_n \to x$ avec $f(x_n) > y$ pour tout n. Alors, si x n'est pas un point de discontinuité de f, et n'est pas dans A_y, on a nécessairement $f(x) = y$. On souhaite montrer que pour Lebesgue-presque tout y, on a $\mu(\partial A_y) = 0$, et pour ce il suffit de montrer que pour Lebesgue-presque tout y, on a $\mu(\{f = y\}) = 0$.

Or $\{y \geqslant 0; \mu(\{f = y\}) > 0\} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \{y \geqslant 0; \mu(\{f = y\}) \geqslant 1/k\}$. Or comme les $\{f = y\}$ sont deux à deux disjoints, $\{y \geqslant 0; \mu(\{f = y\}) \geqslant 1/k\}$ est de cardinal inférieur à k. Donc $\{y \geqslant 0; \mu(\{f = y\}) > 0\}$ est une réunion dénombrable d'ensemble finis, donc dénombrable, et donc de mesure de Lebesgue nulle.

Donc, en utilisant 6, pour Lebesgue-presque tout $y \geqslant 0$, on a $\mu_n(f \geqslant y) \longrightarrow \mu(f \geqslant y)$. Alors, par convergence dominée,

$$\int f d\mu_n = \int_0^{||f||_\infty} \mu_n(f \geqslant y) dy \longrightarrow \int_0^{||f||_\infty} \mu(f \geqslant y) dy = \int f d\mu$$

ce qui conclut la preuve.

□

Dans ce chapitre, on considérera essentiellement soit des epsaces compacts, soit des epsaces localement compacts et σ compacts, c'est à dire qui sont réunion d'une suite croissante de compacts K_n d'intérieur non vide, tels que $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$. On appelle suite exhaustive de compacts une telle suite. En particulier, si on dispose d'une telle suite, alors pour tout compact K il existe un n tel que $K \subset K_n$. Ce cadre ets assez naturel du point de vue de l'analyse, mais insuffisant pour certaines des applications en probabilités, dont le cadre naturel est plutôt celui des epsaces polonais.

On utilisera occasionnellement le lemme suivant :

Lemme 4.1.3 (Lemme d'Urysohn)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique localement compact et* σ*-compact,* K *un compact de* X *et* V *un ouvert contenant* K*. Alors il existe une fonction* f *continue à support compact telle que*

$$\mathbb{1}_K \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_V.$$

Proof. Soit O un ouvert relativement compact contenant K et inclus dans V. La fonction

$$f(x) := \frac{d(x, X\backslash O)}{d(x, K) + d(X\backslash O)}$$

convient. Pour justifier que O existe, considère une suite exhaustive de compacts (K_n), on chosiit n tel que $K \subset K_n$, et on prend $O = \int(K_{n+1}) \cap V$. $\square$

Lemme 4.1.4 (Partition de l'unité)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique localement compact et* σ*-compact,* $K \subset X$ *un compact et* $V_1, ..., V_n$ *un recouvrement de* K *par des ouverts. Il existe une famille* $g_1, ..., g_n$ *de foncitons continues à support compact, avec* $0 \leqslant g_i \leqslant 1$*,* $\operatorname{supp} g_i \subset V_i$ *et*

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1 \quad \forall x \in K.$$

La famille $g_1, ..., g_n$ *est appelée une partition de l'unité subordonnée au recouvrement* $V_1, ..., V_n$ *de* K*.*

4.2 Théorème de Riesz

Etant donné une mesure μ, la fonction

$$f \longrightarrow \int f d\mu$$

définit une forme linéaire continue sur $(C_b(E), ||\cdot||_\infty)$. Le but sera d'utiliser la topologie faible-* pour étudier la convergence de mesures. Pour ce, il nous faut étudier quel ets le dual de $(C_b(\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$. Il se toruve que la situation est un peu différente selon si E est compact ou non, et qu'en général c'ets le dual des fonctions continues à support compact qui est isométrique à l'espace des mesures signées finies.

Définition 4.2.1 (Mesure régulière)**.** *Une mesure borelienne* μ *sur un espace métrique est régulière si pour tout borélien* A *on a*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O);\ A \subset O,\ O \text{ ouvert}\}$$

et

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K);\ K \subset A,\ K \text{ compact}\}.$$

Dans le contexte de ce cours, cette notion ne sera pas mise en avant. On verra par exemple a posteriori qu'il n'y a pas de mesure borelienne finie sur un espace compact qui ne soit pas régulière. Mais dans des contextes plus généraux cette notion peut provoquer des difficultés.

4.2.1 Théorème de Riesz, cas compact

Une forme linéaire T sur un espace de fonctions à valeurs réelles est dite positive si pour toute fonction f positive on a $T(f) \geqslant 0$.

Théorème 4.2.2 (Théorème de Riesz, formes linéaires positives sur $C(K)$)**.** *Soit (K, d) un espace métrique compact, et T une forme linéaire continue et positive sur $(C(K), ||\cdot||_\infty)$. Il existe une unique mesure borélienne μ finie et régulière telle que*

$$T(f) = \int f d\mu \quad \forall f \in C(K).$$

Corollaire 4.2.3. *Sur un espace métrique compact, toute mesure borélinenne finie est régulière.*

Dans le cadre compact, l'ensemble des mesures de probabilité est fermé dans $C(E, \mathbb{R})^*$, et on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 4.2.4 (Théorème de Prokhorov, cas des espaces compacts)**.** *Si (E, d) est un espace compact, alors $\mathcal{P}(E)$ est compact pour la topologie de la convergence étroite.*

Corollaire 4.2.5. *Si une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est uniformément bornée (c'est à dire que il existe $M > 0$ tel que pour tout n on ait $|X_n| \leqslant M$ p.s.), alors on peut en extraire une sous-suite qui converge en loi.*

Preuve du Théorème 4.2.2. **Etape 1 : Unicité**

Soient μ et ν deux mesures boréliennes positives qui représentent une même forme linéaire T. Soit K un fermé (donc compact) et $V_n := \{x; d(x, K) < 1/n\}$. Par le lemme d'Ursohn, il existe $f_n \in C_c(E)$ telle que $\mathbb{1}_K \leqslant f_n \leqslant \mathbb{1}_{V_n}$, et donc

$$\mu(K) \leqslant T(f) \leqslant \cap_{n=1}^{\infty} \nu(V_n).$$

On a donc $\mu(K) \leqslant \nu(K)$, et par symétrie μ et ν coïncident sur les fermés. Un argument de classe monotone justifie alors qu'elles coïncident. A noter qu'on ne les a pas supposées régulières.

Etape 2 : Définition et propriétés sur les ouverts

Soit V un ouvert. On pose

$$\mu(V) := \sup\{T(f); \;\; f \leqslant \mathbb{1}_V\}.$$

Par définition, μ est positive et monotone sur les ouverts. Nous allons montrer l'additivité sur les familles finies d'ouverts disjoints.

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts, et f telle que $0 \leqslant \operatorname{supp} f \leqslant \mathbb{1}_{\cup_n V_n}$. Comme $\operatorname{supp} f$ est compact et inclus dans $\cup_n V_n$, il existe N tel que $\operatorname{supp} f \subset \cup_1^N V_n$. On prend alors $g_1, ..., g_N$ une aprtition de l'unité subordonnée au recouvrement $V_1, ..., V_N$, et alors

$$T(f) = \sum_1^N T(g_n f) \leqslant \sum_1^N \mu(V_n) \leqslant \sum_1^\infty \mu(V_n).$$

On en déduit alors que

$$\mu(\cup_1^\infty V_n) \leqslant \sum_1^\infty \mu(V_n).$$

Soit V_1 et V_2 deux ouverts disjoints, $\varepsilon > 0$ et f_1, f_2 telles que $0 \leqslant f_i \leqslant \mathbb{1}_{V_i}$ et

$$T(f_i) \geqslant \mu(V_i) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $0 \leqslant f_1 + f_2 \leqslant \mathbb{1}_{V_1} + \mathbb{1}_{V_2} = \mathbb{1}_{V_1 \cup V_2}$ et donc

$$\mu(V_1 \cup V_2) \geqslant T(f_1) + T(f_2) \geqslant \mu(V_1) + \mu(V_2) - \varepsilon.$$

On en déduit en faisant tendre ε vers 0 que μ est additive sur les unions de deux ouverts, et on généralise apr récurrence aux unions finies d'ouverts.

Etape 3 : Définition et propriétés sur les compacts

Soit K un compact. On pose

$$\mu(K) := \inf\{\mu(V);\ \ V \text{ ouvert et } K \subset V\}.$$

Par définition, μ est positive et monotone sur les compacts. De plus, on vérifie aisément que si K est à al fois ouvert et fermé, la valeur coïncide avec la définition précédente. Nous allons maintenant montrer l'additivité sur les familles finies de compacts disjoints.

Soient K_1 et K_2 deux compacts, $\varepsilon > 0$ et V_1, V_2 deux ouverts tels que $K_i \subset V_i$ et $\mu(K_i) \geqslant \mu(V_i) - \varepsilon/2$. Alors

$$\mu(K_1 \cup K_2) \leqslant \mu(V_1 \cup V_2) \leqslant \mu(K_1) + \mu(K_2) + \varepsilon.$$

Donc $\mu(K_1 \cup K_2) \leqslant \mu(K_1) + \mu(K_2)$. Supposons maintenant K_1 et K_2 disjoints. Soit V un ouvert contenant $K_1 \cup K_2$ et tel que $\mu(V) \leqslant \mu(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$. Il existe V_1 et V_2 ouverts disjoints tels que V_i contienne K_i et leur union soit contenue dans V. Alors

$$\mu(K_1 \cup K_2) \geqslant \mu(V) - \varepsilon \geqslant \mu(V_1) + \mu(V_2) - \varepsilon \geqslant \mu(K_1) + \mu(K_2) - \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0 on a l'additivité sur deux compacts disjoints, et par récurrence sur les familles finies de compacts disjoints.

Etape 4 : Mesure intérieure, mesure extérieure

Pour $A \subset E$ on définit

$$\mu_*(A) := \sup\{\mu(K),\ \ K \text{ compact } \subset A\};$$

$$\mu^*(A) := \inf\{\mu(V),\ \ K \text{ ouvert } \supset A\}.$$

On a $\mu_* \leqslant \mu^*$, et les deux sont monotones pour l'inclusion. Posons

$$\mathcal{B} := \{A; \mu_*(A) = \mu^*(A)\}.$$

Par construction $\mathcal{B}$ contient les compacts. Montrons que $\mathcal{B}$ contient les ouverts.

Par construction $\mu(V) = \mu^*(V) \geqslant \mu_*(V)$, donc il nous reste à montrer l'inégalité inverse. Soit $f \in C(E)$ telle que $0 \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_V$. Posons $K = \operatorname{supp} f$ et soit W un ouvert contenant K et d'adhérence incluse dans V. Par le lemme d'Urysohn il existe $g \in C(X)$ telle que $\mathbb{1}_K \leqslant g \leqslant \mathbb{1}_W$. On a alors

$$T(f) \leqslant T(g) \leqslant \mu(W) \leqslant \mu(\bar{W}) \leqslant \mu_*(V).$$

En passant au sup sur les f, on obtient

$$\mu^*(V) = \mu(V) \leqslant \mu_*(V)$$

et donc $\mathcal{B}$ contient les ouverts.

Etape 5 : σ-additivité sur $\mathcal{B}$

Soit (A_n) une famille d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints. Nous allons montrer que $\cup_n A_n \in \mathcal{B}$ et que $\mu(\cup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty \mu(A_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout n un compact K_n tel que $K_n \subset A_n$ et $\mu(K_n) \geqslant \mu_(A_n) - \varepsilon/2^n$. Alors

$$\mu_* \left(\cup_1^\infty A_n\right) \geqslant \mu_* \left(\cup_1^N A_n\right) \geqslant \mu_* \left(\cup_1^N K_n\right)$$

$$= \sum_1^N \mu(K_n) \geqslant \sum_1^N \mu(A_n) - \varepsilon$$

et on peut faire tendre N vers l'infini puis ε vers 0 pour avoir

$$\mu_* \left(\cup_1^\infty A_n\right) \geqslant \sum_1^\infty \mu(A_n).$$

En considérant maintenant une suites d'ouverts $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A_n \subset V_n$ et $\mu(A_n) \geqslant \mu(V_n) - \varepsilon/2^n$, on a

$$\mu^* \left(\cup_1^\infty A_n\right) \leqslant \mu \left(\cup_1^\infty V_n\right) \leqslant \sum_1^\infty \mu(V_n) \leqslant \sum_1^\infty \mu(A_n) + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit l'identité voulue.

Etape 6 : $\mathcal{B}$ est une σ-algèbre contenant les boréliens

Avec le raisonnement précédent, on voit que

$$\mathcal{B} = \{A \subset E; \forall\varepsilon > 0 \exists K \text{ compact } \subset A \subset V \text{ ouvert et } \mu(V \backslash K) \leqslant \varepsilon\}.$$

On en déduit que $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire. Comme elle est stable par union dénombrable, c'ets une σ-algèbre, et comme elle contient les ouverts, elle contient aussi les boréliens. De plus, par construction la restriction de μ aux boréliens est régulière.

Etape 7 : μ représente T On veut montrer que pour toute fonction $f \in C(K)$ on a $T(f) = \int f d\mu$. Par linéarité il suffit de montrer que $T(f) \leqslant \int f d\mu$. Comme de plus $T(1) = \mu(E)$, qui tte à ajouter une cnstante à f et à la multiplier par un scalaire, on peut supposer $0 \leqslant f \leqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1$. Pour $k \in \{0, ..., N\}$ on pose

$$A_k := \{x \in E; (k-1)\varepsilon < f(x) \leqslant k\varepsilon\}.$$

Pour tout k on peut choisir un ouvert V_k contenant A_k et tel que $\mu(V_k \backslash A_k) \leqslant \varepsilon/(N+1)$. Alors

$$\int f d\mu \geqslant \sum_{k=0}^N (k-1)\varepsilon\mu(A_k) \geqslant \left(\sum_k (k-1)\varepsilon\mu(V_k)\right) - \varepsilon.$$

Quitte à réduire les V_k, on peut supposer $f \leqslant (k+1)\varepsilon$ sur V_k. Soit $g_1, ...g_N$ une partition de l'unité subordonnée aux V_k. On a

$$T(f) = \sum T(fg_k) \leqslant \sum (k+1)\varepsilon T(g_k) \leqslant \sum (k+1)\varepsilon\mu(V_k).$$

En faisant tendre ε vers 0 on a bien

$$T(f) \leqslant \int f d\mu$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Définition 4.2.6. *Soit (E, d) un espace métrique compact. On appelle mesure de Radon toute forme linéaire continue sur $C(E)$, et on note $\mathcal{M}(E)$ l'espace $C(E)'$ des mesures de Radon sur E, qu'on munit de la norme*

$$||T||_{\mathcal{M}(E)} := \sup\{|T(f)|;\ \ f \in C(E)\ \ et\ ||f||_\infty \leqslant 1\}.$$

Pour une mesure de Radon positive, on a $||T||_{\mathcal{M}(E)} = T(1) = \mu(E)$.

Le théorème de Riesz identifie les mesures de Raon positives aux mesures positives finies. On peut étendre aux formes linéaires générales en décomposant en parties positives et négatives :

Proposition 4.2.7. *Soit (E, d) un epsace métrique compact et T une mesure de Radon sur E. On pose pour $f \geqslant 0$*

$$T_+(f) := \sup\{T(g);\ \ 0 \leqslant g \leqslant f;\ \ g \in C(E)\};$$

$$T_-(f) := -\inf\{T(g);\ \ 0 \leqslant g \leqslant f;\ \ g \in C(E)\};$$

qu'on étend aux fonctions continues générales via

$$T_+(f) = T_+(f_+) - T_+(f_-);\quad T_-(f) = T_-(f_+) - T_-(f_-).$$

Alors T_+ et T_- sont des mesures de Radon positives, et $T = T_+ - T_-$. On a

$$||T||_{\mathcal{M}(E)} = ||T_+||_{\mathcal{M}(E)} + ||T_-||_{\mathcal{M}(E)} = T_+(1) + T_-(1).$$

De plus, la décomposition $T = T_+ - T_-$ est minimale, au sens où si $T = T_1 - T_2$ avec T_I des mesures de Radon positives, alors $T_1 \geqslant T_+$ et $T_2 \geqslant T_-$.

Proof. Il faut montrer que T_+ et T_- sont des formes linéaires. Par définition $T_+(\lambda f) = \lambda T_+(f)$ si $f \geqslant 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Pour l'additivité, soient $f_1, f_2 \geqslant 0$. On a

$$T_+(f_1) + T_+(f_2) = \sup\{T(g_1 + g_2),\ \ 0 \leqslant g_i \leqslant f_i\} \leqslant T_+(f_1 + f_2).$$

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$ et g telle que $0 \leqslant g \leqslant f_1 + f_2$ et $T_+(f_1 + f_2) \leqslant T(g) + \varepsilon$. Alors comme $g = \min(g, f_1)_+ + (g - f_1)_+$ et $0 \leqslant (g - f_1)_+ \leqslant f_2$, on a

$$T_+(f_1 + f_2) \leqslant T(\min(g, f_1)_+) + T((g - f_1)_+) + \varepsilon \leqslant T_+(f_1) + T_+(f_2) + \varepsilon$$

et donc T_+ est bien additive sur les fonctions positives. Ensuite, si $f_1, f_2 \geqslant 0$ et $f = f_1 - f_2 = f_+ - f_-$ alors $f_1 + f_- = f_2 + f_+$ et

$$\begin{aligned} &T_+(f_1) + T_+(f_-) = T_+(f_2) + T_+(f_+) \\ &\qquad\Rightarrow T_+(f) = T_+(f_1 - f_2) = T_+(f_+) - T_+(f_-) = T_+(f_1) - T_+(f_2) \end{aligned}$$

donc T_+ est additive. De plus $T_+(-f) = T_+(0 - f) = -T_+(f)$, donc T_+ est linéaire.

Ensuite, $T_+(||f|| - f) \leqslant 0$ donc $T_+(f) \leqslant ||f|| T_+(1) \leqslant ||f||\, ||T||$ donc T_+ est continue.

Si $f \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}(T_+ - T)(f) &= \sup\{T(g-f); 0 \leqslant g \leqslant f\} \\ &= \sup\{-T(h)0 \leqslant h \leqslant f\} \\ &= T_-(f).\end{aligned}$$

La même identité vaut pour f générale via la décomposition $f = f_+ - f_-$. On en déduit que T_- ets aussi linéaire et continue. Ensuite, si $||f|| \leqslant 1$ on a

$$T(f) = T_+(f) - T_-(f_+) + T_-(f_-) \leqslant T_+(1) + T_-(1)$$

et de plus

$$\begin{aligned}T_+(1) + T_-(1) &= \sup\{T(f-g); 0 \leqslant f, g \leqslant 1\} \\ &\leqslant \sup\{T(h), ||h|| \leqslant 1\} \\ &\leqslant ||T||\end{aligned}$$

On a donc bien $||T|| = T_+(1) + T_-(1)$.

Il nous reste à montrer que la décomposition est minimale. Si $T = T_1 - T_2$ avec T_1, T_2 deux formes linéaires positives, alors $T \leqslant T_1$, et donc $\forall f \geqslant 0$ on a

$$T_+(f) \leqslant \sup\{T_1(g), g \in C(E), 0 \leqslant g \leqslant f\} = T_1(f)$$

donc $T_+ \leqslant T_1$, et nécessairement alors $T_- \leqslant T_2$. □

Théorème 4.2.8. *Si T ets une mesure de Radon sur l'espace métrique compact (E, d) alors il existe μ_1, μ_2 deux mesures boréliennes positives finies telles que*

$$T(f) = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2.$$

De plus, il existe une unique telle représentation telle que $||T|| = \mu_1(E) + \mu_2(E)$.

On voit $\mu_1 - \mu_2$ comme une mesure signée, et l'égalité des normes est lorsqu'on a pris la décomposition de la mesure signée comme une différence de deux mesures positives étrangères.

4.2.2 Théorème de Riesz, cas localement compact

Dans toute cette section, (E, d) sera un espace métrique localement compact et σ-compact

Dans le cadre non-compact, on doit distinguer trois espaces différents de fonctions continues :

-L'espace $C_c(E)$ des fonctions continues à support compact.

-L'espace $C_b(E)$ des fonctions continues bornées.

-L'espace $C_0(E)$ des fonctions continues ayant une limite nulle à l'infini, c'est à dire

$$\{f \in C(E); \forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ compact t.q. } \sup_{E \setminus K} |f(x)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Ce espace est l'adhérence de $C_c(E)$ pour la norme uniforme sur E.

La convegrence étroite des mesures de probabilités est en dualité avec $C_b(E)$, mais ce n'est pas la même que la convergence en dualité avec $C_0(E)$. En effet, on vérifie aisément que la suite des masses de Dirac δ_n en les entiers naturels ne converge pas étroitement, mais elle converge faible-* vers 0 lorsque vu comme un élément de $C_0(E)^*$.

Définition 4.2.9. *Une suite de mesures finies $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vaguement vers μ si*
$$\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu \quad \forall f \in C_0(E).$$

Comme la fonction constante égale à 1 n'est pas dans $C_0(E)$, en général la convergence vague n'implique pas la convergence de la masse totale (alors que c'était le cas dans le cadre compact).

Exercice 4.2.1. *Montrer que $C_0(E)$ est séparable.*

Il s'avère que ce sont les formes linéaires continues sur $C_0(E)$ qu'on peut toujours représenter par des mesures finies :

Théorème 4.2.10. *Soit (E, d) un espace métrique localement compact et σ-compact, et T une forme linéaire continue positive sur $C_0(E)$. Il existe une mesure positive sur E telle que*
$$T(f) = \int f d\mu \qquad \forall f \in C_0(E)$$
Et de plus $||T|| = \mu(E)$.

Pour un exemple de forme linéaire sur $C_b(E)$ non-représentable par une mesure, on peut considérer $E = \mathbb{R}$ et $T(f) = \lim_{+\infty} f$ sur les fonctions admettant une limite, qu'on prolonge ensuite via le théorème de Hahn-Banach. C'est une forme linéaire non-nulle, mais nulle sur toutes les fonctions à support compact. Donc si une mesure borélienne la représentait, elle serait nulle sur tous les compacts, donc nulle, ce qui serait une contradiction.

Esquisse de preuve. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de E. Il existe une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures finies telles que
$$T(f) = \int f d\mu_n \quad \forall f \in C(K_n);\;\; \mu_n(K_n) \leqslant ||T||.$$
On peut étendre ces mesures à E via $\mu_n(A) := \mu_n(A \cap K_n)$.

Comme les K_n sont croissantes, par unicité de la mesure dans le cadre compact, on vérifie que la restriction de μ_{n+1} à K_n est μ_n. Donc pour tout borélien A la suite $\mu_n(A)$ est croissante, bornée par $||T||$, donc converge vers un réel positif noté $\mu(A)$. Il nous faut montrer que μ est une mesure, puis que $T(f) = \int f d\mu \forall f \in C_0(E)$.

Soit (A_k) une famille de boréliens deux à deux disjoints. Par monotonie, on a
$$\mu\left(\cup A_k\right) \geqslant \mu_n(\cup A_k) = \sum \mu_n(A_k) \geqslant \sum_{k\leqslant N} \mu_n(A_k).$$
En faisant tendre n vers l'infini, puis N, on obtient
$$\mu\left(\cup A_k\right) \geqslant \sum_k \mu(A_k).$$
Pour l'inégalité inverse, on a
$$\mu_n\left(\cup A_k\right) = \sum \mu_n(A_k) \leqslant \sum_k \mu(A_k)$$
et on fait tendre n vers l'infini pour conclure.

Enfin, μ représente T sur les fonctions continues à support compact car la suite est exhaustive, et par densité on conclut aussi pour les éléments de $C_0(E)$. $\square$

En utilisant le théorème de Banach-Alaoglu, on obtient :

Corollaire 4.2.11. *De toute suite de mesures de probabilités sur E on peut extraire une sous-suite qui converge vaguement.*

Attention, la limite dans ce corollaire n'est pas nécessairement une mesure de probabilité.

On peut passer des formes linéaires positives aux formes linéaires générales avec la même décomposition que dans le cas compact :

Théorème 4.2.12. *Soit E un espace métrique localement compact σ-compact, et T une forme linéaire continue sur $C_0(E)$ (muni de la norme uniforme). Il existe deux mesures borleiennes positives finies telles que*

$$T(f) = \int f d\mu_+ - \int f d\mu_-; \quad ||T|| = \mu_+(E) + \mu_-(E).$$

4.3 Théorème de Prokhorov

Définition 4.3.1 (Tension). *Un ensemble $\Gamma \subset \mathcal{P}(E)$ est tendu si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\varepsilon \subset E$ tel que*

$$\sup_{\mu \in \Gamma} \mu(E \backslash K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 4.3.1.

1. *Soit μ une mesure de probabilité sur un espace polonais. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, il existe un nombre fini N_k de boules de rayon $1/k$ dont l'union est de mesure supérieure à $1 - 2^{-k}\varepsilon$.*
2. *En déduire que le singleton $\{\mu\}$ est tendu.*
3. *Montrer qu'un ensemble fini de mesures de probabilité sur un espace polonais est tendu.*

Solution 4.3.1.

1. *Comme E est polonais, on peut considérer une suite dénombrable dense $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Comme pour tout $k \geqslant 1$, on a $\cup_n \bar{B}(z_n, 1/k) = E$, où $\bar{B}$ est une boule fermée de centre et rayon donnés, on peut toujours trouver N_k tel que*
$$\mu\left(\cup_{n \leqslant N_k} \bar{B}(z_n, 1/k)\right) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}.$$
2. *On considére $A = \cap_k \left(\cup_{n \leqslant N_k} \bar{B}(z_n, 1/k)\right)$. On a*
$$\mu(A^c) \leqslant \sum_k \mu\left(\left(\cup_{n \leqslant N_k} \bar{B}(z_n, 1/k)\right)^c\right) \leqslant \varepsilon.$$
De plus, A est recouvrable par un nombre fini de boules de rayon arbitrairement petit, donc A est précompact. Comme de plus A est fermé, cet ensemble est compact. On a donc un ensemble compact de masse arbitrairement proche de 1, donc $\{\mu\}$ est tendu.
3. *Soit $\{\mu_1, ..., \mu_n\}$ un ensemble fini de mesures. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des compacts K_i tels que $\mu_i(K_i) \geqslant 1 - \varepsilon$. Alors $\cup_i K_i$ est un compact, et tous les μ_i lui donnent une masse supérieure à $1 - \varepsilon$. L'ensemble $\{\mu_1, ..., \mu_n\}$ est donc tendu.*

Théorème 4.3.2. *Soit (E, d) un espace métrique localement compact et σ-compact. Une famille de mesures de probabilité est relativement compacte dans $\mathbb{P}(E)$ (pour la convergence étroite) ssi elle est tendue.*

Ce théorème est aussi vrai dans le cadre des espaces polonais (mais la preuve est différente, car on ne peut plus s'appuyer sur le théorème de Riesz).

Proof. Démontrons que une famille tendue est relativement compacte. Soit $T_n = \int f d\mu_n$ où (μ_n) est une suite dans l'ensemble tendu. Quitte à extraire, on peut supposer que T_n converge faible-* vers $T = \int f d\mu$, et donc que μ_n converge vaguement vers μ. Par semi-continuité inférieure on a $\mu(E) \leqslant 1$.

Soit $\varepsilon > 0$ et K un compact tel que $\sup_n \mu_n(E \backslash K) \leqslant \varepsilon$. Sans perdre de généralité on peut ausis supposer que $\mu(E\backslash K) \leqslant \varepsilon$. Soit $f \in C_b(E)$ et $g \in C_c(E)$ telle que $\mathbb{1}_K \leqslant g \leqslant 1$. Alors

$$\left|\int f d\mu_n - \int f d\mu\right| \leqslant \left|\int f g d\mu_n - \int f g d\mu\right| + ||f||_\infty(\mu_n(E\backslash K) + \mu(E\backslash K)).$$

Le rpemier terme tend vers 0 par convergence vague, car $fg \in C_c(E)$. Le seocnd terme est contrôlé par $\varepsilon||f||_\infty$. On en déduit la convergence étroite. Et en prenant $f = 1$ on voit que μ est bien une mesure de probbabilité. $\square$

Exemple 4.3.1. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur $\mathbb{R}^d$ et μ_n la suite des lois.*

1. *Si $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|^p] < \infty$ pour un $p > 0$ alors (μ_n) est tendue.*
2. *Si il existe une variable aléatoire positive Y telle que $|X_n| \leqslant Y$ p.s., alors (μ_n) est tendue.*

4.4 Concentration-compacité

Théorème 4.4.1 (Concentration-compacité sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$). *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilités. On peut en extraire une sous-suite (que par abus de langage on notera encore $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$) qui vérifie l'une des trois possibilités suivantes :*

1. *Evanescence : pour tout $R > 0$ on a $\lim_n \sup_x \mu_n(B(x, R)) = 0$;*
2. *Concentration : Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que $\mu_n(B(x_n, R)) \geqslant 1 - \varepsilon$ pour tout n.*
3. *Dichotomie : il existe $\lambda \in (0, 1)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$, une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n*
$$|\mu_n(B(x_n, R)) - \lambda| \leqslant \varepsilon; \quad \mu_n(B(x_n, R_n)\backslash B(x_n, R)) \leqslant \varepsilon.$$

Définition 4.4.2. *La fonction de concentration de L'evy d'une mesure positive μ sur $\mathbb{R}^d$ est*
$$Q(r) := \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mu(B(x, r)).$$

La fonction de concentration étant une fonction croissante, on va pouvoir utiliser le lemme suivant :

Proposition 4.4.3 (Lemme de Helly-Braye). *Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$. Alors il existe une sous-suite qui converge simplement.*

Preuve du lemme de Helly-Braye. Comme un produit dénombrable d'espaces métriques séquentiellement compacts est séquentiellement compact, il existe une sous suite convergeante en tous points de $\mathbb{Q}$, que nous noterons f_n. Notons f la limite de cette sous-suite convergeante. On peut définir

$$f_-(x) := \sup\{f(y), y \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, x]\}, \quad f_+(x) := \inf\{f(y), y \in \mathbb{Q} \cap [x, +\infty)\}.$$

Par monotonie, l'ensemble D des points auxquels $f_-(x) < f_+(x)$ est au plus dénombrable. Notons encore $f(x)$ leurs valeurs communes sur $\mathbb{R} \backslash D$.

Nous allons maintenant montrer que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ sur $\mathbb{R} \backslash D$. Soit $x \in \mathbb{R} \backslash D$. Il existe $y < x$ et $z > x$ rationnels tels que

$$f(y) \geqslant f(x) - \varepsilon; \quad f(z) \leqslant f(x) + \varepsilon$$

. Par convergence simple des suites $(f_n(y))$ et $(f_n(z))$, pour tout n suffisamment grand on a alors

$$f_n(y) \geqslant f(x) - 2\varepsilon; \quad f(z) \leqslant f(x) + 2\varepsilon$$

. Par monotonie des f_n, on a alors pour n suffisamment grand

$$f(x) - 2\varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) - 2\varepsilon$$

et donc on a bien convergence simple sur $\mathbb{R} \backslash D$.

Enfin, comme D est dénombrable, on peut extraire une sous-suite qui converge aussi simplement sur D, ce qui conclut la preuve. □

Preuve du Théorème 4.4.1. On considère la suite Q_n des fonctions de concentration. Comme c'est une suite de fonctions croissantes à valeurs dans $[0,1]$, en appliquant le lemme de Helly-Bray quitte à extraire on peut supposer qu'elle converge simplement vers une limite Q, qui est une fonciton croissante à valeurs dans $[0,1]$. Quitte à n'avoir la convergence que presque partout (ou plus précisément, sauf en un nombre dénombrable de points), on peut supposer que Q est continue à gauche, et alors $Q(R) \leqslant \liminf Q_n(R_n)$.

1er cas : $Q(\infty) = 0$. On vérifie alors aisément que la sous-suite est evanescente.

2eme cas : $Q(\infty) = 1$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que à partir d'un certain rang $Q_n(R) \geqslant 1 - \varepsilon$. Appliquer cet énoncé tel quel donne une suite (x_n) qui dépend de R, donc il faut travailler un peu plus. Soit R_0 et $(x_n)_{n \in N}$ telles que $\mu_n(B(x_n, R_0)) \geqslant Q_n(R_0) - n^{-1} > 1/2$ (pour n assez grand). Soit $R > 0$ tel que $Q(R) > 1 - \varepsilon > 1/2$ et (y_n) telle que $\mu_n(B(y_n, R)) \geqslant Q_n(R) - n^{-1}$. Comme

$$\liminf \mu_n(B(x_n, R_0)) + \mu_n(B(y_n, R)) > 1$$

pour n assez grand l'intersection des deux boules est non vide, et $B(y_n, R) \subset B(x_n, 2R + R_0)$. Alors $\liminf \mu_n(B(x_n, 2R+R_0)) \geqslant 1 - \varepsilon$, et on a donc concentration.

3eme cas : $Q(\infty) = \lambda \in (0,1)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $R > 0$, une suite (x_n) et une suite croissante (R_n) telles que $R_n > R' > R$ et pour n assez grand

$$|\mu_n(B(x_n, R) - \lambda| < \varepsilon; \quad \mu_n(R^d \backslash B(x_n, R_n)) < 1 - \lambda + \varepsilon.$$

□

4.5 Introduction au transport optimal

Pour une introduction plus complète au transport optimal, on pourra consulter [4, 9].

Définition 4.5.1 (Transport optimal)**.** *Soit* $c\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue, et* $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$*. Le problème de transport optimal avec coût c est*

$$\inf_{\pi \in C(\mu,\nu)} \int c(x,y) d\pi$$

où $C(\mu, \nu)$ *est l'ensemble des couplages de* μ*, et* ν*, c'est à dire l'ensemble des mesures de probabilités sur* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *dont la première marginale est* μ *et la deuxième marginale ets* ν*.*

On peut aussi voir $C(\mu, \nu)$ comme l'ensemble des lois de variabls aléatoires de la forme (X, Y) où X a pour loi μ et Y a pour loi ν.

Théorème 4.5.2 (Existence du transport optimal)**.** *Supposons que c est continue minorée et que* $\int c(x,y)d\mu(x)d\nu(y) < \infty$*. Alors il existe un couplage optimal.*

Lemme 4.5.3. *Pour toutes mesures de probabilité* μ *et* ν *sur* $\mathbb{R}^d$ *données, l'ensemble des couplages de* μ *et* ν *est compact.*

Proof. Commençons par montrer que l'ensemble des couplages est relativement compact. Soit $\varepsilon > 0$ et K_1 et K_2 des compacts tels que

$$\mu(K_1^c) \leqslant \varepsilon/2; \quad \nu(K_2^c) \leqslant \varepsilon/2.$$

Alors pour tout couplage π on a

$$\pi((K_1 \times K_2)^c) \leqslant \pi(K_1^c \times \mathbb{R}^d) + \pi(\mathbb{R}^d \times K_2^c) = \mu(K_1^c) + \nu(K_2^c) \leqslant \varepsilon.$$

Comme $K_1 \times K_2$ est compact, on en déduit que l'ensemble des couplages est tendu, et donc relativement compact par le Théorème de Prokhorov.

Il nous reste à montrer que l'ensemble des couplages est fermé pour la convergence étroite pour conclure la preuve. Soit π_n une suite de couplages, qui converge étoitement vers une mesure de probabilité π sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Pour toute fonction continue bornée

$$\int f(x) d\pi(x,y) = \lim \int f(x) d\pi_n(x,y) = \lim_n \int f(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

Donc la première marginale de π est μ. Le même raisonnement appliqué àla seconde marginale montre qu'elle est égale à ν, et donc π est aussi un couplage de μ et ν. L'ensemble des couplages est donc bien fermé, et donc compact. □

Preuve du Théorème 4.5.2. Tout d'abord, comme la mesure produit est un couplage, l'inf est fini.

Soit π_n une suite de couplages de μ et ν tels que

$$\lim \int c(x,y) d\pi_n = \inf_{C(\mu,\nu)} \int c(x,y) d\pi$$

Comme l'ensemble des couplages est compact, quitte à extraire, on peut supposer que π_n converge étroitement vers un couplage π_∞. Comme π_∞ est un couplage, par définition on a

$$\int c(x,y)d\pi_\infty \geqslant \inf_{C(\mu,\nu)} \int c(x,y)d\pi.$$

De plus, pour tout $R > 0$

$$\begin{aligned}\int (c \wedge R)d\pi_\infty &= \lim_n \int (c \wedge R)d\pi_n \\ &\leqslant \lim_n \int cd\pi_n = \inf_{C(\mu,\nu)} \int c(x,y)d\pi.\end{aligned}$$

Et donc, par limite monotone en R, on a

$$\int cd\pi_\infty \leqslant \inf_{C(\mu,\nu)} \int c(x,y)d\pi..$$

Comme on avait déjà l'inégalité inverse, on en déduit qu'il y a égalité, ce qui conclut la preuve. $\square$

Chapter 5

Introduction aux distributions

La théorie des distributions a été développée par L. Schwartz dans les années 40 et 50 (avec des travaux antérieurs de Heaviside en physique, et de Hadamard, Leray, Sobolev... au début du 20eme siècle), avec pour but de donner un sens aux dérivées de fonctions non-lisses, ainsi que de mesures. Elle est basée sur deux principes :

-on peut considérer une fonction f via la forme linéaire associée

$$\int f\varphi dx \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d);$$

-si on cherche une fonction g de la forme $g = \partial_{\mathbf{k}} f = \partial_{x_1}^{k_1} \cdots \partial_{x_d}^{k_d}$, après intégration par parties cela revient à considérer les $\int (-1)^{|\mathbf{k}|} f \partial_{\mathbf{k}} \varphi dx$ pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

En particulier, on peut chercher à résoudre une EDP de la forme

$$\sum_{\mathbf{n} \in I} \partial_{\mathbf{n}} f = g$$

où I est un ensemble fini de multi-indices, en cherchant une fonction f telle que

$$\int \sum \mathbf{n} \in I (-1)^{|\mathbf{n}|} f \partial_{\mathbf{n}} \varphi dx = \int g \varphi dx.$$

On parle de solution au sens des distributions. Plus généralement, f peut ne pas être une fonction, mais seulement un élément d'un espace de formes linéaires. On pourrait également considérer d'autres espaces de fonctions que $c_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Comme dans le chapitre précédent, il sera parfois utile de travailler aec une suite exhaustive de compacts. Dans le cadre d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, un exemple simple est $K_j := \{x \in \Omega; |x| \leqslant j$ et $d(x, \Omega^c) \leqslant j^{-1}$. On a bien $K_j \subset \operatorname{int}(K_{j+1})$ et $\Omega = \cup K_j$.

5.1 Intégration par parties

Définition 5.1.1 (Suite régularisante)**.** *Une suite régularisante sur $\mathbb{R}^d$ est une famille de fonctions $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définies par $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} \rho_1(x/\varepsilon)$ où ρ_1 est une fonction C^∞ à support dans $B(0,1)$ avec $\int \rho_1 dx = 1$.*

Si on veut un exemple précis de telle fonction, on peut utiliser $\rho_1(x) := C \exp(1/(x^2 - 1))$ si $|x| < 1$, et 0 sinon.

Lemme 5.1.2. *Si $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, alors $\rho_\varepsilon * f \in C_c^\infty$ et converge uniformément et dans L^p vers f.*

Lemme 5.1.3 (Partition de l'unité sur $\mathbb{R}^d$, version lisse)**.** *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $U_1, ..., D_k$ un recouvrement de K par des ouverts. Il existe des fonctions $\varphi_j \in C_c^\infty$ et à valeurs dans $[0,1]$, chacune nulle en dehors de U_j, et telles que $\sum \varphi_j = 1$ sur un voisinage de K.*

Pour pouvoir faire des intégrations par parties, il va nous falloir définir le terme de bord. On ne considérera que le cas de domaines ouverts à bord lisse, au sens suivant

Définition 5.1.4. *Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ ets de classe C^k si il existe $\Phi \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\Omega = \{\Phi < 0\}$, $\partial\Omega = \{\Phi = 0\}$ et $\nabla\Phi \neq 0$ sur $\partial\Omega$.*

La normale extérieure de Ω en $x \in \partial\Omega$ est alors

$$n(x) := \frac{\nabla\Phi(x)}{|\nabla\Phi(x)|}.$$

On construit ensuite la mesure de surface de l'ouvert Ω. Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et $e_d = n(x_0)$. On paramétrise alors $x = (x', x_d)$ avec x' les coordonnées de la projection de x sur l'hyperplan $e_d^\perp$ (qu'on identifie à $\mathbb{R}^{d-1}$). Alors $\partial_d\Phi(x_0)\nabla\Phi(x_0) \cdot n(x_0) = 1$, et par théorème des foncitons implicites il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ contenant x_0, Q un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ contenant x_0' et $\varepsilon > 0$ tels que $x \longrightarrow (x', \Phi(x))$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. On note g la fonction telle que $(x', t) \longrightarrow (x', g(x', t))$ soit l'inverse de ce difféomorphisme (donc définie sur $Q \times (-\varepsilon, \varepsilon)$), et $g_0(x') = g(x', 0)$. On a alors

$$\{\Phi = t\} \cap U = \{(x', g(x', t));\ \ x' \in Q\}\ \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon); \tag{5.1}$$

$$\Omega \cap U = \{(x', g(x', t));\ \ x' \in Q,\ \ t \in (-\varepsilon, 0)\}; \tag{5.2}$$

$$\partial\Omega \cap U = \{(x', g_0(x'));\ \ x' \in Q\}. \tag{5.3}$$

Pour $f \in C_c(U)$, on pose alors

$$\int f d\sigma = \int_Q f(x', g_0(x'))\sqrt{1 + |\nabla g_0(x')|^2} dx'.$$

On généralise ensuite aux fonctions $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ en considérant les ouverts U_x associés à chaque point de $\partial\Omega$ puis en en extrayant un reocuvrement de $\mathrm{supp}(f) \cap \partial\Omega$ par un nombre fini d'ouverts $U_1, ... U_k$. On considère ensuite une partition de l'unité (θ_j) subordonnée à ce recouvrement. La cosntruction précédente s'applique à chaque $\theta_j f$, et on pose

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma := \sum \int \theta_j f d\sigma.$$

La mesure σ ainsi définie est la mesure de surface de $\partial\Omega$.

Avec cette construction, il n'est pas évident de voir que σ ne dépend pas du choix des ouverts U_j et des fonctions g obtenues via le théorème des fonctions implicites. C'est toutefois le cas, grâce au lemme suivant :

Lemme 5.1.5. *Soit Ω un ouvert de classe C^1, Φ et σ comme définies précédemment, et $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. On a alors*

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\delta} |\nabla\Phi(x)| f(x) dx$$

où $\Omega_\delta := \{x \in \Omega;\ \ \Phi(x) > \delta\}$.

Proof. On peut supposer sans perdre de généralité que $\text{supp}(f) \subset U$ où U est un ouvert tel que la paramétrisation (5.1) soit vraie pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pour tout $\delta < \varepsilon$ on a

$$\Omega_\delta \cap U = \{(x', t); \quad x' \in Q, \ \ t \in (-\delta, 0)\}.$$

Comme le jacobien du changement de variable $(x', t) \longrightarrow (x', g(x', t))$ est $\partial_t g(x', t)$, on a par changement de variable

$$\int_{\Omega_\delta} |\nabla\Phi(x)| f(x) dx = \int_{-\delta}^0 \int_Q |\nabla\Phi(x', g(x', t))| f(x', g(x', t)) |\partial_t g(x', t)| dx' dt.$$

Mais comme $\Phi(x', g(x', t)) = t$ par construction, on a

$$\partial_d \Phi(x', g(x', t)) \partial_t g(x', t) = 1; \ \ \nabla_{x'} \Phi(x', g(x', t)) = -\partial_d \Phi(x', g(x', t)) \nabla_{x'} g(x', t).$$

Donc

$$\begin{aligned} |\nabla\Phi(x', g(x', t))|^2 &= |\partial_d \Phi(x', g(x', t))|^2 + |\nabla_{x'} \Phi(x', g(x', t))|^2 \\ &= |\partial_d \Phi(x', g(x', t))|^2 (1 + |\nabla_{x'} g(x', t)|^2) \\ &= \frac{1 + |\nabla_{x'} g(x', t)|^2}{\partial_t g(x', t)^2} \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\frac{1}{\delta} \int_{\Omega_\delta} |\nabla\Phi(x)| f(x) dx = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^0 \int_Q f(x', g(x', t)) \sqrt{1 + |\nabla_{x'} g(x', t)|^2} dx' dt$$

et on passe à la limite en utilisant le théorème de Fubini et le théorème de convergence dominée. □

Théorème 5.1.6 (Formule de Stokes). *Soit Ω un ouvert de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ et $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On a*

$$\int_\Omega \text{div}(\psi) dx = \int_{\partial\Omega} \nabla\psi(x) \cdot n(x) d\sigma(x).$$

Proof. Tout d'abord, on rappelle que si φ est à support compact inclus dans Ω, alors $\int_\Omega \partial_i \varphi dx = 0$.

Soit ρ_δ une suite régularisante sur $\mathbb{R}$, g_δ la fonction continue paire égale à 1 sur $[0, \delta]$, affine sur $[\delta, 1]$ et nulle au delà, et $f_\delta := \rho_{\delta/2} * g_\delta$. On pose $\eta_{\varepsilon,\delta} := f_\delta(\varepsilon^{-1}\Phi)$ avec δ et ε petits. Comme η est constante égale à 1 sur un voisinage de $\Phi = 0$, $(\eta - 1)\varphi$ est à support compact inclus dans Ω, et donc on a

$$\int_\Omega \text{div}(\varphi) dx = \int_\Omega \text{div}(\eta_{\varepsilon,\delta} \varphi) dx = \int_\Omega \eta_{\varepsilon,\delta} \, \text{div}(\varphi) dx + \int_\Omega \nabla\eta_{\varepsilon,\delta} \cdot \varphi dx.$$

Le premier terme tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 (uniformément en $\delta \in (0, \delta_0])$), par application du théorème de convergence dominée. Le second terme est égal à

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\varepsilon(1+\delta/2)}} f_\delta' \nabla\Phi \cdot \varphi dx,$$

et come Φ est régulière, $\{\Phi = \varepsilon\} \cap \operatorname{supp}(\varphi)$ est de mesure nulle pour ε assez petit, par convergence dominée lorsque $\delta \to 0$ ce terme converge vers

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\Phi \cdot \varphi dx.$$

Une application du lemme 5.1.5 donne

$$\lim_{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\Phi \cdot \varphi dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|} \cdot \varphi d\sigma = \int n(x)\cdot\varphi(x) d\sigma(x).$$

□

Corollaire 5.1.7 (Intégration par parties). *Si* $f, g \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *on a*

$$\int_\Omega f\partial_i g = -\int_\Omega \partial_i f g + \int_{\partial\Omega} f g n_i d\sigma.$$

Si $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *on a*

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi) = -\int \nabla u \cdot \varphi + \int_{\partial\Omega} u\varphi \cdot n d\sigma.$$

Enfin, si $f, g \in C_c^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *alors*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = -\int_\Omega (\Delta u) v + \int_{\partial\Omega} (\partial_n u) v d\sigma$$

et

$$\int_\Omega (\Delta u) v = \int_\Omega u(\Delta v) + \int_{\partial\Omega} (v\partial_n u - u\partial_n v)\, d\sigma.$$

Proof. La première inégalité se déduit de la formule de Stokes en prenant $\varphi = uve_i$. La deuxième s'obtient en utilisant $\operatorname{div}(u\varphi) = u \operatorname{div}(\varphi) + \nabla u \cdot \varphi$. La troisième s'obtient en prenant $\varphi = \nabla u$ et en utilisant que $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$. La dernière se déduit de la trosième en symmétrisant les rôles de u et v. □

5.2 Topologie limite inductive et espace $\mathcal{D}(\Omega)$

5.3 Espaces de distributions

5.3.1 Distributions à support compact

5.3.2 Distributions tempérées

5.4 Opérations sur les distributions

5.5 Solutions fondamentales d'opérateurs différentiels

Chapter 6

Transformation de Fourier

Chapter 7

Espaces de Sobolev

Chapter 8

Analyse spectrale

Chapter 9

Un peu de géométrie algébrique

Il existe deux manières de compenser l'absence de théorème des fonctions implicites en géométrie algébrique, toutes deux dûes à Grothendieck. La première est la construction du site étale attaché à une variété algébrique. La seconde est l'algorithme suivant, adaptée depuis SGA 4 dans [10] :

1. "'Retirer la base du chou chinois puis le couper en quatre, dans la longueur,et le tailler en lanières d'env. 4 cm de largeur. Verser l'eau et le sel dans une grande jatte, ajouter le chou, bien mélanger et le malaxer légèrement dans la saumure même. Le laisser ensuite tremper 3-4 h (le chou doit être entièrement immergé; si nécessaire, ajouter un peu d'eau). Détailler les oignons nouveaux en morceaux d'env. 5 cm de long; si les bulbes à la base sont trop épais, les couper en deux ou en quatre. Tailler le radis long d'abord en tranches d'env. 3 mm, puis en bâtonnets. Réserver le tout.

2. Entre-temps, pour la pâte de piment, mélanger l'eau et la farine de riz dans une petite casserole puis amener lentement à ébullition en remuant jusqu'à liaison. Retirer la casserole du feu et laisser refroidir. Incorporer le gochugaru et laisser la pâte reposer env. 20 min. Hacher grossièrement l'ail et le gingembre puis les réduire en purée [...].

3. Égoutter le chou et le remettre dans la jatte. La remplir d'eau froide, bien rincer le chou et l'égoutter à nouveau. Répéter deux fois l'opération. Le chou devrait être encore très salé. Bien l'essorer. Incorporer l'ail, le gingembre, le sucre et la sauce de poisson à la pâte de piment. L'ajouter au chou avec les oignons nouveaux et le radis long. Mélanger et malaxer le tout de façon à faire pénétrer la pâte de piment.

4. Ébouillanter les bocaux, couvercles compris, et les égoutter. Y répartir le kimchi jusqu'à 2 cm du bord, bien presser de façon à éliminer l'air emprisonné. Couvrir d'une feuille de papier sulfurisé et poser les couvercles. Laisser reposer 2-3 jours à l'abri de la lumière et à température ambiante jusqu'à formation de bulles. Retirer les couvercles et les feuilles de papier afin de permettre au gaz s'étant formé de s'échapper. Refermer les bocaux et laisser le kimchi fermenter au moins 5 jours au réfrigérateur. Surveiller l'évolution en procédant à des dégustations journalières."'

Bibliography

[1] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle.

[2] J. Bourgain, The metrical interpretation of super-reflexivity in Banach spaces. *Israel J. Math.* 56, 221–230 (1986).

[3] P. Enflo, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. *Israel Journal of Mathematics.* 13: 281–288 (1972).

[4] A. Figalli and F. Glaudo, An invitation to optimal transport

[5] B. Kloeckner, Yet another proof of Bourgain's distortion estimate for embedding of trees into uniformly convex Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics* 200, 419–422 (2014).

[6] P. Lax, Functional Analysis.

[7] G. Pisier, Martingales with values in uniformly convex spaces. *Israel Journal of Mathematics.* 20: 326–350 (1975).

[8] C. Villani, Intégration et Analyse de Fourier. 2006.

[9] C. Villani, Topics in optimal transportation.

[10] L. Projer, https://migusto.migros.ch/fr/recettes/kimchi-recette-de-base